

**Proposition 1.** *L'ensemble des fonctions infiniment dérivable à support compact est dense dans  $L^p$*

On montre 3 inclusions :

- (i) D'abord le sev  $L_c^p$  des fonctions de  $L^p$  à support compact est dense dans  $L^p$  (en considérant  $f|_{[-n,n]}$ ).
- (ii) De plus le sev des fonctions continues à support compact est dense dans  $L_c^p$  (en approximant une fonction indicatrice par des fonctions affines par morceaux, et par définition de la mesure de Lebesgue, il suffit d'approximer les indicatrices des pavés).
- (iii) Enfin soit  $f \in \mathcal{C}_C^0$  et  $(\phi_n)$  une approximation de l'unité à support compact et infiniment dérivable (par exemple celle associée à  $\phi_0 : t \mapsto e^{\frac{-1}{(1-t^2)}} 1_{[-1,1]}$ ). On en déduit que  $\phi_n * f$  est à support compact ( $\text{supp}(\phi_n * f) \subseteq \text{supp}(\phi_n) + \text{supp}(f)$ ) et  $\mathcal{C}^\infty$  par le théorème de dérivabilité de Lebesgue (car dominée par une constante sur un compact). Enfin, si  $\epsilon > 0$ , il vient en notant  $\eta$  un module d'uniforme continuité de  $f$  associé à  $\epsilon$  :

$$|\phi_n * f(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \phi_n(y)(f(x-y) - f(x))dy \right|$$

d'où (par Jensen) :

$$\begin{aligned} \|\phi_n * f - f\|_p &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y) - f(y)|^p \phi_n(y) dy dx \\ &\stackrel{F.-T.}{=} \int_{B(0,\eta) \times \mathbb{R}} \dots + \int_{B(0,\eta)^c \times \mathbb{R}} \dots \\ &\leq 2\|f\|_{\text{inf ty}} \mu(\text{Supp} f + \text{Supp} \phi_0) \int_{B(0,\eta)^c} \phi_n + \mu(\text{Supp} f + \text{Supp} \phi_0) \|\phi_n\|_1 \|\tau_{-y} f - f\|_\infty \\ &\leq \epsilon(1 + \mu(\text{Supp} f + \text{Supp} \phi_n)) \end{aligned}$$

Donc  $\phi_n * f \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$  et le résultat.