

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Mohamed NASSIRI

Références :

Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière- p.140 $\rightarrow$ 143

Recasage :

- 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Résumé :

L'intégrale de Dirichlet fait partie des exemples à connaître de fonctions qui ne sont pas intégrables mais dont l'intégrale est convergente.

Prérequis :

Théorèmes de continuité et dérivabilité sous signe intégral - Notation de Landau

Théorème :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Dans cette démonstration, on va utiliser les théorèmes de continuité et dérivabilité sous signe intégral de manière abondantes.

On pose

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \mapsto e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}$$

et

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

Pour $x > 0$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est prolongeable par continuité en 0 par $f(x, 0) = 1$ (car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$) et que pour t tendant vers $+\infty$, on remarque que $f(x, t) = O(1/t^2)$ (car, à x fixé,

$$|t^2 e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}| \leq t e^{-xt} \rightarrow 0).$$

Montrons que F est bien définie en 0 :

Par intégrations par parties, on a, $\forall X \leq 1$:

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t} \right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car c'est un $O(1/t^2)$ en $+\infty$). Par suite, quand $X \rightarrow +\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Donc F est définie en 0.

Montrons que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$:

f est de classe $C^{+\infty}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -te^{-xt} \sin(t), \quad \forall (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$$

Soit $a > 0$, et $\forall x \geq a$, on a $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq e^{-at}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de continuité et dérivabilité sous signe intégrale, on a donc que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt = -\text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt \right) = -\text{Im} \left(\frac{1}{i-x} \right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $F(x) = C - \arctan(x)$, et comme :

$$|F(x)| \leq \underbrace{\frac{\sin(t)}{t}}_{\leq 1} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit donc que $C = \frac{\pi}{2}$ et par suite, $\forall x > 0$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Montrons que $F(0) = \frac{\pi}{2}$ i.e. F est continue en 0 :

Ici, on pourrait être tenté d'appliquer le théorème de convergence dominée, mais ce sera voué à l'échec car la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable ... Mais nous n'avons pas dit notre dernier mot !

On décompose le problème (ou plutôt l'intégrale) en deux morceaux :

$$F_1(x) := \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad F_2(x) := \int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Pour F_1 , c'est assez simple :

F_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car on a $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| = e^{-xt} |\sin(t)| \leq 1$ (et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, 1]$...).

Passons à F_2 dont on a juste besoin de savoir si elle est continue. On va étudier la fonction

$$G(x) := \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt$$

dont F_2 est la partie imaginaire.

$\forall X \geq 1$, par intégration par parties, on a :

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt = \left[\frac{1}{i-x} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} \right]_1^X + \frac{1}{i-x} \int_1^X \frac{-e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$$

Or $|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, donc on en déduit que :

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$$

Or la fonction $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[\rightarrow \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue et dominée par la fonction intégrable $t \rightarrow \frac{1}{t^2}$.
Donc G est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc F_2 aussi, et donc F également. Ouf!

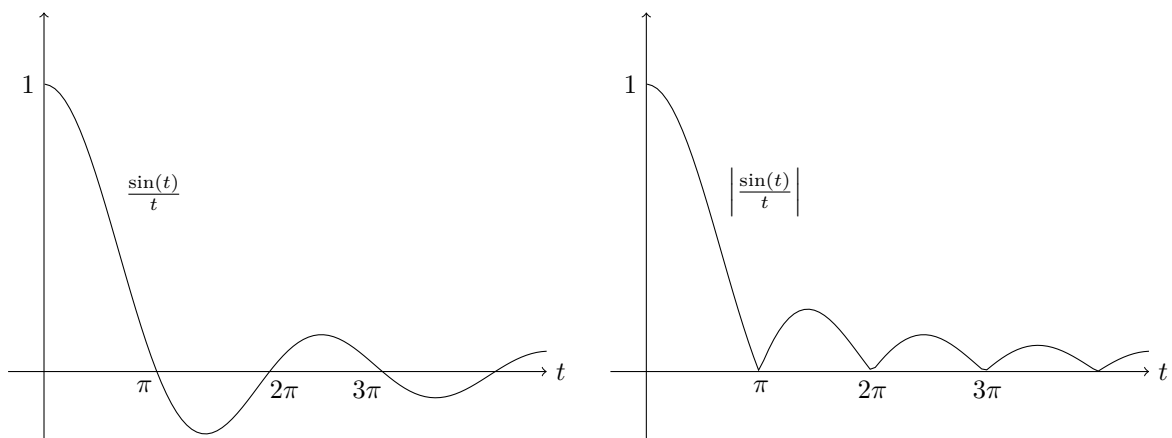
Conclusion : $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ □

Remarques :

- En faisant ce développement, il faut savoir démontrer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable ! Pour voir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ est divergente, on écrit, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{N\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \\ &\underset{\substack{t=x+k\pi \\ dt=dx}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{x+k\pi} dx \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^\pi \frac{|\sin(x)|}{\pi+k\pi} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \int_0^\pi |\sin(x)| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

La différence entre les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est que dans le second cas, il y a un changement de signe du sinus qui entraîne une compensation ... Chose que l'on perd dans la première intégrale.



- **Transformée de Laplace**

Quand on a posé, au début de la démonstration,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

il faut savoir, pour la culture, que l'on a posé la *transformée de Laplace* de la fonction $t \rightarrow \frac{\sin(t)}{t}$.

- Il y a, malheureusement, une démonstration plus rapide ...

En remarquant que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy} dy$$

On en déduit que pour tout $a \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) \sin x dx$$

Pour $a > 0$ fixé, on pose pour tout $(x, y) \in]0, a[\times]0, +\infty[$, $f(x, y) = e^{-xy} \sin x$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^a |f(x, y)| dx \right) dy \leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a e^{-xy} dx \right) dy = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ay}}{y} dy$$

Or, la fonction $y \mapsto g(y) = \frac{1 - e^{-ay}}{y}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car g est prolongeable par continuité en

0 et $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 g(y) = 0$ ( Erreur!). Donc f est intégrable sur $]0, a[\times]0, +\infty[$.

Ainsi par le théorème de Fubini, on a

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a e^{-xy} \sin x dx \right) dy$$

Par ailleurs,

$$\int_0^a e^{-xy} \sin x dx = \operatorname{Im} \left(\int_0^a e^{-xy} e^{ix} dx \right) = \frac{1}{1 + y^2} - \frac{e^{-ay}}{1 + y^2} (\cos a + y \sin a)$$

Par suite,

$$\int_0^a e^{-xy} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ay}}{1 + y^2} (\cos a + y \sin a) dy$$

Or, pour tout $y \in [0, +\infty[$, la fonction $y \mapsto f_a(y) = \frac{e^{-ay}}{1 + y^2} (\cos a + y \sin a)$ vérifie $\lim_{a \rightarrow +\infty} f_a(y) = 0$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $|f_a(y)| \leq e^{-\alpha y}$ donc le théorème de convergence dominée entraîne $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_a(y) dy = 0$ et donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$