

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Mohamed NASSIRI

Référence :

Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer , p.520 → 522

Recasage :

••••• 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

••••○

Résumé :

Blablabla

Prérequis :

Equations différentielles linéaires - Wronskien - Séries entières - Intégrales à paramètres - Théorème de dérivation sous le signe intégral

Théorème : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications continues et enfin $(t_0, u_0) \in I\mathbb{R}^n$.

Le problème de Cauchy

$$(C) \quad \begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution unique définie sur I .

Démonstration.

Etape 1 : Réécriture du problème sous forme intégrale :

Remarquons qu'une solution Y est solution du problème de Cauchy si et seulement si elle est solution dans $C(I, \mathbb{R}^n)$ de l'équation :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(x)Y(x) + B(x))dx \quad (CI)$$

⇐ : Considérons Y un élément de $C(I, \mathbb{R}^n)$ solution de (CI) . L'application définie par

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto A(t)Y(t) + B(t) \end{aligned}$$

étant continue sur I , l'application

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \int_{t_0}^t (A(x)Y(x) + B(x))dx$$

est dérivable sur I de dérivée f . On en déduit que Y , solution de (CI) , est dérivable sur I de dérivée $f = AY + B$.

L'égalité $Y(t_0) = u_0$ nous permet de déduire que Y est solution de (C) .

$\Rightarrow$: Supposons que Y soit solution du problème de Cauchy (C) . Alors Y est de classe C^1 sur I . On obtient donc

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t Y'(x)dx = u_0 + \int_{t_0}^t (A(x)Y(x) + B(x))dx$$

Ainsi, Y est solution de (CI) .

Etape 2 : Remarquer un problème de point fixe :

On a donc que Y soit solution du problème de Cauchy (C) si et seulement si Y est un point fixe de l'application $\Theta_I : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ définie par

$$\Phi : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$$

$$F \mapsto \Theta_I(F) : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \Theta_I(F)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(x)F(x) + B(x))dx \end{cases}$$

Etape 3 : Montrons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que Θ^p soit contractante :

On suppose (d'abord) que I est un segment $[a, b]$:

Préparons le terrain :

On choisit une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$.

On munit $C(I, \mathbb{R}^n)$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ (qui en fait un espace vectoriel normé complet).

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme notée $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et on pose

$$M = \sup_{t \in [a, b]} \|A(t)\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Soient $F_1, F_2 \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [a, b], \quad \left\| \Theta_{[a, b]}^k(F_1)(t) - \Theta_{[a, b]}^k(F_2)(t) \right\| \leq \frac{(M|t - t_0|)^k}{k!} \|F_1 - F_2\|_\infty$$

Pour $k = 0$, le résultat est clair.

On suppose donc l'hypothèse vérifiée au rang k et on tente de la montrer au rang $k + 1$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad \left\| \Theta_{[a, b]}^{k+1}(F_1)(t) - \Theta_{[a, b]}^{k+1}(F_2)(t) \right\| &= \left\| \Theta_{[a, b]} \left(\Theta_{[a, b]}^k(F_1)(t) \right) - \Theta_{[a, b]} \left(\Theta_{[a, b]}^k(F_2)(t) \right) \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t A(x) \left(\Theta_{[a, b]}^k(F_1)(x) - \Theta_{[a, b]}^k(F_2)(x) \right) dx \right\| \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^t \frac{(M|t - t_0|)^k}{k!} \|F_1 - F_2\|_\infty dx \right| \\ &= \frac{(M|t - t_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \|F_1 - F_2\|_\infty \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(M|t-t_0|)^k}{k!} = 0$, il existe k assez grand tel que $\frac{(M|t-t_0|)^k}{k!} < 1$, et pour cette valeur de k , l'application $\Theta_{[a,b]}^k$ est contractante de $C(I, \mathbb{R}^n)$ dans $C(I, \mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, $C(I, \mathbb{R}^n)$ est un espace complet. Ainsi, le théorème du point fixe appliqué à l'application $\Theta_{[a,b]}^k$ montre alors que $\Theta_{[a,b]}^k$ a un unique point fixe Y .

On suppose désormais que I est un intervalle quelconque :

Soit $F \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Pour tout segment $[a, b] \subset I$ avec $t_0 \in [a, b]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], \quad \Theta_I^k(F)(t) = \Theta_{[a,b]}^k(F)(t)$$

La suite $(\Theta_{[a,b]}^n(F))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers l'unique point fixe de $\Theta_{[a,b]}$. On en déduit que $(\Theta_I^n(F))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers un point fixe de Θ_I que l'on notera G .

Etape 4 : Unicité du point fixe :

Supposons que G_1 et G_2 soient deux points fixes de Θ_I . Alors pour tout segment $[a, b] \subset I$ avec $t_0 \in [a, b]$, les restrictions $G_1|_{[a,b]}$ et $G_2|_{[a,b]}$ sont égales à l'unique point fixe de $\Theta_{[a,b]}$. On en déduit donc que $G_1 = G_2$.

Conclusion : Nous avons bien démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy. □

Remarques :

• **Remarque 1 :**

• **Remarque 2 :**

Théorème :

Démonstration :

□

