[Rouv p. 209, 354]

Développement : Lemme de Morse :

leçons {158, 214, 171, 215, 151}

Le lemme de Morse exprime que localement, autours de 0, à un changement de coordonnées près, le graphe de f est celui d'une forme quadratique. Si f est de classe C^k, le difféo est de classe C^{k-2}.

Lemme : (Réduction des formes quadratiques)

(ce lemme montre que toute forme quadratique suffisament voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente (i.e. même signature) càd se ramène à celle-ci par un changement de base. Les matrices symétriques de signature $(p,q)_{p+q=n}$ forment donc un ouvert de S_n).

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ M \text{ symétrique}\}$.

Soit $A_0 \in S \cap GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists\, U$ voisinage de A_0 dans S et

$h : U \to GL_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto M$ de classe C^1 tq $\forall A \in U,\ A = {}^t h(A) . A_0 . {}^t h(A)$.

Preuve : Nous allons appliquer le TIL à $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S$, $M \mapsto {}^tM . A_0 . M$

car ${}^t({}^tMA_0M) = {}^tM\,{}^tA_0\,M = {}^tM\,A_0\,M$

- φ est C^1 car polynomiale en les coef de M.
- Calculons $D_{Id}\varphi$:

$$\varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) = {}^tH . A_0 + A_0 H + \underbrace{{}^tH A_0 H}_{\leq \|A_0\|\,\|H\|^2}$$

$$= {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|^2).$$

donc $D_{Id}\varphi(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$.

$\rightarrow \forall N \in S$, $D_{Id}\varphi\left(\frac{1}{2} . A_0^{-1} N\right) = N$ donc $D_{Id}\varphi$ surjective dans S.

$\rightarrow \ker D_{Id}\varphi = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A_0H \text{ antisymétrique}\}$.

Ainsi, $F := \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A_0H \text{ symétrique}\}$ est un supplémentaire de $\ker D_{Id}\varphi$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$. De plus, $Id \in F$.

Soit $\psi : F \to S$ la restriction de φ à F.

Alors $D_{Id}\psi$ est la restriction de $D_{Id}\varphi$ à F.

$D_{Id}\psi$ est surjective comme vu précédemment
$\ker D_{Id}\psi = \ker D_{Id}\varphi \cap F = \{0\}$ $\Big\}$ $D_{Id}\psi$ bijective donc inversible

Par le théorème d'inversion locale, $\exists\, U$ voisinage de Id dans F (que l'on peut supposer dans $GL_n(\mathbb{R})$), $\exists\, V = \psi(U)$ voisinage de $\psi(Id) = A_0$ dans S tq ψ soit un C^1-difféomorphisme de U sur V.

Ainsi, $\forall A \in V$, $\exists!\, M \in U$ tq $A = \psi(M) = {}^tM.A_0.M$.

On a $M = \psi^{-1}(A)$ et donc $M = h(A)$ de classe C^1. ∎

Lemme de Morse :

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3. On suppose que 0 est un point critique de f, (i.e. $Df(0) = 0$), et que la forme quadratique hessienne $D^2f(0)$ est non dégénérée de $\mathrm{sgn}(p, n-p)$. Alors $\exists\, \varphi$ un C^1-difféo entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$ où $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$.

Preuve :

▶ Étape 1 : Taylor reste intégral :

f est C^3 sur U voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$, on peut appliquer la formule de Taylor reste intégral au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = f(0) + D_0 f\,(x) + {}^tx.\,Q.\,x \qquad \text{où } Q(x) = \int_0^1 (1-t)\,D^2f(tx)\,dt \in S_n(\mathbb{R})$$

où $D^2f(tx)$ identifié comme la matrice hessienne de f au point tx.

De plus, f est C^3 donc Q est C^1 sur U.

▶ Étape 2 : On applique le lemme à $Q(0)$:

* $Q(x) \in S_n(\mathbb{R})$. En effet, f est $\mathcal{C}^3$ donc les dérivées partielles secondes sont continues.

* $Q(0) = \frac{1}{2} D_0^2 f$ (calcul de l'intégrale) inversible car par hypothèse $D_0^2 f$ matrice d'une forme quadratique non dégénérée.

En effet : $D_0^2 f$ est $\begin{cases} \text{non dégénérée} \\ \text{symétrique donc diagonalisable} \end{cases}$ donc $\det(D_0^2 f) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
λ_i les vp de $D_0^2 f$. On $D_0^2 f$ non dégénérée donc toutes les vp sont $\neq 0$, i.e. $D_0^2 f$ inversible.

↳ $Q(0) \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. Par le lemme, $\exists\, \bar{U}$ voisinage de $Q(0)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\bar{M} : \bar{U} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie : $\forall A \in \bar{U}$, ${}^t\bar{M}(A) \cdot Q(0) \cdot \bar{M}(A) = A$.

Or Q est $\mathcal{C}^1$ sur U donc $\exists\, U$ voisinage de 0 sur $\mathbb{R}^n$ tq $\forall x \in U, Q(x) \in \bar{U}$.

Soit $M : \begin{array}{l} U \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ x \longmapsto \bar{M}(Q(x)) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée d'appli de classe $\mathcal{C}^1$. $\forall x \in U$, ${}^tM(x) \cdot Q(0) \cdot M(x) = Q(x)$ (car $Q(x) \in \bar{U}$)

Ainsi $\forall x \in U$, $f(x) - f(0) = {}^t(M(x) \cdot x) \cdot Q(0) \cdot (M(x) \cdot x)$

▶ Étape 3 : Utilisation du théorème de Sylvester :

Par hypothèse, $Q(0) = \frac{1}{2} D_0^2 f$ est la matrice d'une forme quadratique de signature $(p, n-p)$ donc d'après le théorème de Sylvester, $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $Q(0) = {}^tP \cdot D \cdot P$ où $D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}p \\ \}n-p \end{matrix}$

Alors $\forall x \in U$, $f(x) - f(0) = {}^t(P \cdot M(x) \cdot x)\, D\, (P\, M(x) \cdot x)$
$= {}^t\varphi(x)\, D\, \varphi(x)$.

avec $\varphi : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto P \cdot M(x) \cdot x \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

En notant $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ les applications coordonnées de φ :

$$\forall x \in U, \quad f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$$

▶ Étape 4 : Vérifier que φ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféo sur voisinage de 0 :

M est $\mathcal{C}^1$ donc au voisinage de 0, $M(h) = M(0) + o(\|h\|)$

donc $\varphi(0+h) = P.M(h).h = \underbrace{P\, M(0).h}_{\text{linéaire en } h} + o(\|h\|)$

Ainsi $D_0\varphi(h) = P.M(0).h$. Or $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$

donc $D_0\varphi$ inversible.

On applique alors le TIL et on obtient que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféo sur un voisinage de 0 $\underbrace{\text{ouvert}}_{\text{on se restreint au plus petit ouvert}}$. De plus $\varphi(0) = 0$. ∎

Appli : exo 111 p. 341, Rouvière.