Théorème de Lax-Milgram et application

205 213
208 222

Définition: Soit $(E, \|\cdot\|)$ evn, φ forme linéaire sur E, f forme bilinéaire sur E. On dit que φ est continue si : $\exists M>0 \mid \forall u \in E, |\varphi(u)| \leq M\|u\|$. On dit que f est continue si : $\exists M>0 \mid \forall u,v \in H$, $|f(u;v)| \leq M\|u\|\|v\|$ et f est coercive si : $\exists \mu>0$ $\forall u \in E$, $f(u;u) \geq \mu\|u\|^2$

Théorème: Soit H un Hilbert, F sous-espace fermé de E.
Alors: $H = F \oplus F^\perp$

Théorème: (de Riesz) Soit H espace de Hilbert, $\varphi : H \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue sur H.
Alors: $\exists ! y \in H \mid \forall x \in H$, $\varphi(x) = \langle x | y \rangle$

Preuve:

EXISTENCE:
- Si $\varphi = 0$, alors $y = 0$ convient
- Sinon,

Soit $F = \ker(\varphi)$ hyperplan de H.
Comme φ est continue, F est fermé dans H.
Par le théorème, $H = F \oplus F^\perp$
Comme $F^\perp$ est de dimension 1,
$\exists a \in F^\perp \setminus \{0\} \mid \varphi(a) = 1$.
Soit $y = \frac{a}{\|a\|^2}$. Ainsi, $\forall x \in F$, $\varphi(x) = 0 = \langle x | y \rangle$
De plus, $\forall x \in F^\perp$, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid x = \lambda a$ et alors:
$\langle x | y \rangle = \langle \lambda a \mid \frac{a}{\|a\|^2} \rangle = \lambda = \varphi(x) = \varphi(\lambda a)$
Ainsi, $\langle \cdot | y \rangle$ coïncide avec φ sur H.

UNICITÉ:
Soit $y, z \in H$ tels que: $\forall x \in H$, $\varphi(x) = \langle x | y \rangle = \langle x | z \rangle$
En particulier, pour $x = y - z$, on a:
$\langle y-z | y-z \rangle = 0$ d'où : $y = z$.

Théorème: (de Lax-Milgram) Soit H espace de Hilbert, f forme bilinéaire sur H, coercive et φ forme linéaire continue sur H.
Alors: $\exists ! u \in H \mid \forall v \in H$, $f(u;v) = \varphi(v)$

Preuve:

oral

L'idée pour cette preuve est de trouver une bonne application T contractante afin d'utiliser le théorème de point fixe de Picard.

Par le théorème de Riesz:
- $\exists ! w \in H \mid \forall v \in H$, $\varphi(v) = \langle v | w \rangle$
- $\forall u \in H$, $\exists ! A_u \in H \mid \forall v \in H$, $f(u;v) = \langle A_u | v \rangle$

Montrons que: $\exists ! u \in H \mid A_u = w$

Soit $A : \begin{array}{l} H \to H \\ u \mapsto A_u \end{array}$. A est :
- linéaire : soit $u, u', v \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle A_{u+\lambda u'} | v \rangle = f(u+\lambda u'; v)$
$= f(u;v) + \lambda f(u';v)$
$= \langle A_u | v \rangle + \lambda \langle A_{u'} | v \rangle$

donc $\langle A_{u+\lambda u'} - A_u - \lambda A_{u'} | v \rangle = 0$

donc $A_{u+\lambda u'} = A_u + \lambda A_{u'}$
- continue : soit $u \in H$

$\|A_u\|^2 = \langle A_u | A_u \rangle = f(u; A_u) \leq M \|u\| \|A_u\|$
(par continuité de f)
Alors: $\|A_u\| \leq M \|u\|$ d'où A continue

Puisque f est coercive, $\exists \mu > 0 \mid \forall u \in H$, $f(u;u) \geq \mu \|u\|^2$

Soit $T : \begin{array}{l} H \to H \\ u \mapsto u - \eta[A_u - w] \end{array}$ avec $\eta = \frac{\mu}{M^2}$

Ainsi, $u \in H$ est point fixe de T ssi $A_u = w$
Montrons maintenant que T est contractante.
Soit $u, v \in H$.

$$\|T(u) - T(v)\|^2 = \|u - v - \eta[A_u - A_v]\|^2$$
$$= \|u-v\|^2 - 2\eta \langle u-v | A_{u-v} \rangle + \eta^2 \|A_{u-v}\|^2$$
$$= \|u-v\|^2 - 2\eta f(u-v; u-v) + \eta^2 \|A_{u-v}\|^2$$
$$\leq \|u-v\|^2 \left|1 - 2\eta\mu + \eta^2 M^2\right|$$
$$\leq \|u-v\|^2 \underbrace{\left|1 - \frac{\mu^2}{M^2}\right|}_{<1}$$

Puisque H est complet et T est contractante, $\exists ! u \in H \mid A_u = w$ par le théorème de point fixe de Picard.

Pour la leçon 222, faire Lax-Milgram et l'application suivante :

Application: Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert borné et $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, soit $f \in L^2(\Omega)$ et $b_0 > 0$.
Soit (E) le problème : trouver $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que: $-\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]^2} \partial_i [a_{i,j} \partial_j u] + b_0 u = f$ tel que:
$\exists \mu > 0 \mid \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} a_{i,j}(y) x_i x_j \geq \mu \sum_{i=1}^n x_i^2$
Alors: $\exists ! u \in H_0^1(\Omega) \mid u$ est solution de (E).

Preuve :

$H := H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ est un espace de Hilbert pour
$\|u\|_{H^1} = \left(\int_\Omega \left[|u|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i u|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$.

On remarque que $\|u\|_2 \leq \|u\|_{H^1}$ et que :
$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\|\partial_i u\|_2 \leq \|u\|_{H^1}$

Soit $a : \begin{array}{l} H \times H \to \mathbb{R} \\ (u;v) \mapsto \sum_{i,j \in [\![1;n]\!]^2} \int_\Omega a_{i,j} \partial_j u \, \partial_i v + \int_\Omega b_0 u v \end{array}$

et $\varphi : \begin{array}{l} H \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \int_\Omega f v \end{array}$. On a :

(i) $\forall v \in H$, $|\varphi(v)| \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_{H^1}$
(par le théorème de Cauchy-Schwarz)
d'où la continuité de φ

(ii) $\forall u, v \in H$,

$$|a(u;v)| \leq \sum_{i,j \in [\![1;n]\!]^2} \int_\Omega |a_{i,j}| |\partial_j u| |\partial_i v| + \int_\Omega b_0 |uv|$$
$$\leq \sum_{i,j} \|a_{i,j}\|_\infty \int_\Omega |\partial_j u| |\partial_i v| + b_0 \|u\|_2 \|v\|_2$$
$$\leq \sum_{i,j} \|a_{i,j}\|_\infty \|\partial_j u\|_2 \|\partial_i v\|_2 + b_0 \|u\|_2 \|v\|_2$$
$$\leq \sum_{i,j} \|a_{i,j}\|_\infty \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + b_0 \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$
$$\leq \left(\sum_{i,j} \|a_{i,j}\|_\infty + b_0\right) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

d'où la continuité de a.

(iii) $\forall u \in H$,

$$a(u;u) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} \partial_j u \, \partial_i u + \int_\Omega b_0 u^2$$
$$\geq \int_\Omega \mu \sum_{i=1}^n \partial_i u^2 + b_0 \int_\Omega u^2$$
$$\geq \min(b_0; \mu) \int_\Omega u^2 + \sum_{i=1}^n \partial_i u^2$$
$$\geq \min(b_0; \mu) \|u\|_{H^1}^2$$

d'où la coercivité de a

Par le théorème de Lax-Milgram, il existe alors un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H$, $a(u;v) = \varphi(v)$.
En particulier, $\forall g \in \mathcal{D}(\Omega) \subseteq H$, $a(u;g) = \varphi(g)$
i.e. $\sum_{i,j} \int_\Omega a_{i,j} \partial_j u \, \partial_i g + \int_\Omega b_0 u g = \int_\Omega f g$

Or : $\langle \partial_i [a_{i,j} \partial_j u] | g \rangle = -\langle a_{i,j} \partial_j u | \partial_i g \rangle$
$= -\int_\Omega a_{i,j} \partial_j u \, \partial_i g$

Ainsi, $\langle -\sum_{i,j} \partial_i [a_{i,j} \partial_j u] + b_0 u | g \rangle = \langle f | g \rangle$
d'où l'égalité $-\sum_{i,j} \partial_i [a_{i,j} \partial_j u] + b_0 u = f$
valable dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, avec $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
C'est l'unique élément de H qui vérifie cela par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans H.

V1 14' 56" slow
V1 13' 23"