

Développement : Injectivité de la transformation de FOURIER

ANALYSE & PROBABILITÉS

Référence : [EA] EL AMRANI M., *Analyse de FOURIER dans les espaces fonctionnels - Niveau M1*, ellipses, 2008, p115.

Pour la transformée de FOURIER de la gaussienne : p156.

Pour les leçons :

- 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- 234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.
- 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
- 245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
- 250 : Transformation de FOURIER. Applications.

Le but de ce développement est de montrer que la transformation de FOURIER est injective sur $L^1(\mathbb{R})$. On définit l'application *transformation de FOURIER* comme suit :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

Lemme 1. Transformée de FOURIER de la gaussienne.

Soit $a > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$. Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \gamma_{1/a}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

PREUVE : Soit $\xi \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma_a}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2 - ix\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left((x+i\frac{\xi}{2a})^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right)} dx \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour $R > 0$, on note $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R$, R , $R + i\frac{\xi}{2a}$, $-R + i\frac{\xi}{2a}$, parcouru dans le sens direct. On a :

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2} i dt - \int_{-R}^R e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx - \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2} i dt.$$

On note $I_1(R)$, $I_2(R)$, $I_3(R)$, $I_4(R)$ les intégrales à droite de l'égalité, dans l'ordre.

$$\longrightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} I_1(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

$$\longrightarrow |I_2(R)| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)} dt = e^{-aR^2} \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\longrightarrow \text{De même, } \lim_{R \rightarrow +\infty} I_4(R) = 0.$$

$$\longrightarrow \text{On a que } \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx \text{ converge absolument, donc :}$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_3(R) = \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx.$$

Maintenant, la fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (qui est convexe) et $\Gamma(R)$ est fermé. Donc :

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz = 0.$$

En rassemblant tous ces résultats, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+i\frac{\xi}{2a})^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Reprenant de (1), on a donc :

$$\widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

ce qui achève la preuve dans le cas $\xi \geq 0$. Le cas $\xi \leq 0$ se traite via des calculs similaires. □

Théorème 2. Injectivité de la transformation de FOURIER.

L'application $\mathcal{F}$ est injective sur $L^1(\mathbb{R})$.

PREUVE : Déjà, $\mathcal{F}$ est linéaire. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \equiv 0$, et montrons que f est nulle presque partout. Soient $s > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{x^2}{2s}} ; \quad g_s(x) = e^{iax} \gamma_s(x).$$

D'une part, par translation puis parce que $\hat{\gamma}_s$ est paire, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}_s(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{\gamma}_s(x - a) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{\gamma}_s(a - x) dx \\ &= f * \hat{\gamma}_s(a) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}} f * \gamma_{\frac{1}{s}}(a), \end{aligned}$$

d'après le lemme précédent.

D'autre part, comme $\hat{f} \equiv 0$ et $g_s \in L^1(\mathbb{R})$, d'après la formule de dualité :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \hat{g}_s(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) g_s(x) dx = 0.$$

Donc :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{\frac{2\pi}{s}} f * \gamma_{\frac{1}{s}}(a) = 0.$$

$(\gamma_{1/s})_{s>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc :

$$0 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \|f * \gamma_{1/s} - f\|_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \|f\|_1 = \|f\|_1,$$

ce qui prouve que f est nulle presque partout, et cela achève la preuve. $\square$

Remarques 3.

[1] Si on avait la formule d'inversion de connue, on aurait pu retrouver l'injectivité de la transformation de FOURIER. En effet, si $\mathcal{F}f \equiv 0$, il suffit d'appliquer la formule d'inversion pour trouver que f est nulle presque partout.

[2] Avoir une idée de la preuve du fait que $(\gamma_{1/s})_{s>0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ est un plus. Voici quelques bribes d'arguments, si $s > 0$:

- En considérant $\gamma_{1/s}$, son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1 (intégrale de GAUSS) ;

- Elle est positive, donc $\sup_{s>0} \int_{\mathbb{R}} \gamma_{1/s}(x) dx = \sup_{s>0} 1 = 1 < +\infty$;

- Si $\delta > 0$, une application du théorème de convergence dominée (provenant d'un théorème de croissances comparées) permet d'écrire que $\lim_{s \rightarrow 0^+} \int_{|x|>\delta} |\gamma_{1/s}(x)| dx = 0$.

En fait, la famille d'applications $(\gamma_{1/s})_{s>0}$ est appelée *noyau de la chaleur*.

On peut généraliser tous ces résultats dans $\mathbb{R}^d$.