

Indécomposabilité de la loi de Poisson

Aurélien Guerder

2023-2024

Source : Queffélec, Analyse complexe et applications

Théorème 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre λ . Alors X et Y suivent des lois de Poisson.

Pour la preuve, on utilise un théorème d'analyse complexe, qu'on admet :

Théorème 2. Soit f une fonction entière qui ne s'annule pas. Alors il existe une fonction entière F telle que $f = e^F$.

Passons à la preuve du théorème 1.

Démonstration. On considère les fonctions génératrices de X et Y :

$$f(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n \text{ et } g(z) = \mathbb{E}(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n z^n$$

□

où $p_n = \mathbb{P}(X = n)$ et $q_n = \mathbb{P}(Y = n)$. Ces séries entières ont a priori un rayon de convergence au moins 1 car $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1$. On va montrer qu'elles sont en fait des fonctions entières, c'est-à-dire de rayon de convergence infini.

On a $\forall z \in \mathbb{C}, \mathbb{E}(z^Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n = e^{\lambda(z-1)}$, et l'indépendance de X et Y donne $\forall z \in B(0, 1)$,

$$f(z)g(z) = \mathbb{E}(z^{X+Y}) = \mathbb{E}(z^Z)$$

Ainsi, on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} z^n$ sur $B(0, 1)$.

$z = 0$ donne $p_0 q_0 = e^{-\lambda} > 0$ donc $p_0 > 0$ et $q_0 > 0$, et la formule du produit de Cauchy donne $\forall n \geq 1, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p_n q_0 + \dots + p_0 q_n \geq p_n q_0$.

On a donc $\forall n \geq 1, 0 \leq p_n \leq \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{q_0 n!}$ d'où $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$ a un rayon de convergence infini. Il en est de même pour $g(z)$.

Comme on a $f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$ sur $B(0, 1)$, le théorème de prolongement analytique donne

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

Maintenant, on va identifier les fonctions f et g pour y reconnaître des fonctions génératrices de lois de Poisson.

Pour $|z| = r \geq 1$, on a $|f(z)| \leq f(|z|) = f(r)$ et $q_0 f(r) \leq f(r)g(r) = e^{\lambda(r-1)}$.
On a alors $|f(z)| \leq C e^{\lambda(|z|-1)}$ pour $|z| \geq 1$, où $C = 1/q_0 > 0$.

Utilisons maintenant le théorème 2 : On écrit $f = e^F$ où $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction entière.
Alors, pour $|z| \geq 1$, $|f(z)| = |e^{F(z)}| = e^{\operatorname{Re}(F(z))} \leq C e^{\lambda(|z|-1)}$. On en tire alors :

$$\text{pour } |z| \geq 1, \operatorname{Re}(F(z)) \leq \lambda(|z| - 1) + \ln(C) \quad (1)$$

Fixons $r \geq 1$. D'une part, on a :

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (2)$$

En effet, la formule de Cauchy à l'ordre n donne

$$\begin{aligned} F^{(n)} &= \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{F(w)}{w^{n+1}} dw \\ a_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}} i r e^{i\theta} d\theta \\ a_n r^n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \end{aligned}$$

D'autre part, le théorème de Cauchy sur un cercle donne

$$\forall n \geq 1, 0 = \frac{1}{2ir\pi} \int_{C(0,r)} F(w) w^{n-1} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \quad (3)$$

En conjuguant (3) et en lui ajoutant (2), on obtient

$$\begin{aligned} a_n r^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(F(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta \\ |a_n r^n| &\leq 2\lambda(r-1) + 2\ln(C) \quad \text{par (1)} \\ |a_n| &\leq \frac{2\lambda(r-1)}{r^n} + \frac{2\ln(C)}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

D'où $\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = a_0 + a_1 z$.

Comme $f(1) = 1$, on a $a_0 + a_1 \in 2i\pi\mathbb{Z}$. On peut supposer $a_1 = -a_0 = a$ quitte à remplacer F par $F - a_1 - a_0$. Alors on a $F(z) = a(z-1)$ et $f(z) = e^{a(z-1)}$.

On a presque ce qu'on cherche : il ne manque plus qu'à montrer que a est un réel positif. Or,
 $a = f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n p_n = \mathbb{E}(X) \geq 0$. Ainsi, X suit la loi de Poisson de paramètre a . Il en est de même pour Y qui suit une loi de Poisson de paramètre b .