

Théorème de Riesz-Fischer

Aurélien Guerder

2023-2024

Sources :

- LESESVRE, MONTAGNON, LE BARBENCHON, PIERRON, 131 développements pour l'oral
- Olivier GARET – Aline KURTZMANN, De l'intégration aux probabilités, Deuxième édition augmentée

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. On abrègera en L^p l'espace $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$.

Remarque : On utilise souvent sans le dire dans cette preuve qu'une limite de fonctions mesurables est mesurable : c'est nécessaire pour que les limites construites soient dans les ensembles L^p . (On utilise aussi que les sommes sont mesurables mais c'est plus facile et si on suppose déjà connue la structure vectorielle de L^p , on suppose automatiquement connu ce résultat aussi.) Souvent, quand on voit cette preuve, on ne le dit pas, mais il faudrait le dire et il faut savoir le montrer. Il n'est pas forcément pertinent de le présenter à l'oral mais voilà comment on fait :

Proposition 1. Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Alors $\sup_{n \geq 0} f_n$, $\inf_{n \geq 0} f_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n$ et $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Pour le premier point, on a en posant $f = \sup_{n \geq 0} f_n$,

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, f^{-1}([x, +\infty]) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}([x, +\infty])$$

qui est mesurable, or les $[x, +\infty]$ engendrent la tribu.

Pour le deuxième point, on peut simplement remarquer que $\inf_{n \geq 0} f_n = -\sup_{n \geq 0} (-f_n)$ et appliquer le point précédent.

Pour les derniers points, on a $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} f_k$ et $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n = \sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} f_k$ mesurables par les deux premiers points. $\square$

Proposition 2. Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ qui converge presque partout vers $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On peut choisir f mesurable.

Démonstration. Si $(f_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a $f = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n$ μ -pp donc on applique la proposition précédente.

Si $(f_n)_n$ est à valeurs dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, on applique le point précédent à $\operatorname{Re}(f_n)$ et $\operatorname{Im}(f_n)$. $\square$

Venons-en au théorème :

Théorème 1. L^p est complet pour $p \in [0, \infty]$.

Démonstration. **Cas 1 :** $p = \infty$

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de L^∞ :

$\forall k \geq 1, \exists n_k \in \mathbb{N}, \forall q, r \geq n_k, \|f_r - f_q\|_\infty < \frac{1}{k}$, ce qu'on réécrit :

$\forall k \geq 1, \exists n_k \in \mathbb{N}, \forall q, r \geq n_k, \exists E_{k,q,r} \subset \Omega$ de mesure nulle, $\forall x \in \Omega \setminus E_{k,q,r}, |f_r(x) - f_q(x)| < \frac{1}{k}$.

Posons $E = \bigcup_{k,q,r \in \mathbb{N}^* | q,r \geq n_k} E_{k,q,r}$ qui est de mesure nulle en tant qu'union dénombrable d'ensembles de mesure nulle. On obtient alors,

$$\forall k \geq 1, \exists n_k \in \mathbb{N}, \forall q, r \geq n_k, \forall x \in \Omega \setminus E, |f_r(x) - f_q(x)| < \frac{1}{k} \quad (1)$$

et ainsi $\forall x \in \Omega \setminus E, (f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{C}$ donc converge car $\mathbb{C}$ est complet. Notons $f(x)$ sa limite. On va montrer que f est la limite de $(f_n)_n$ dans L^∞ .

Faisons tendre r vers $+\infty$ dans 1 : $\forall k \geq 1, \forall q \geq n_k, \forall x \in \Omega \setminus E, |f_q(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$.

On a donc $\forall x \in \Omega \setminus E, \forall k \geq 1, \forall q \geq n_k, |f(x)| \leq \frac{1}{k} + |f_q(x)| \leq \frac{1}{k} + \|f_q\|_\infty$ d'où $f \in L^\infty$, et $\forall k \geq 1, \forall q \geq n_k, \|f_q - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ d'où f est la limite de $(f_n)_n$ dans L^∞ .

Cas 2 : $p < \infty$

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy de L^p :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \phi(n) \geq n, \forall q, r \geq \phi(n), \|f_r - f_q\|_p \leq \frac{1}{2^n}$. On peut choisir la suite $\phi(n)$ strictement croissante.

Posons $h_n = f_{\phi(n)}$. On va montrer que $(h_n)_n$ converge dans L^p .

Posons $g_n = \sum_{k=0}^n |h_{k+1} - h_k|$. On a alors $\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^n \|h_{k+1} - h_k\|_p \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq 2$.

De plus, la suite $(g_n)_n$ est presque partout croissante donc elle converge presque partout vers une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Le lemme de Fatou donne

$$\begin{aligned} \|g\|_p^p &= \int |g|^p d\mu \\ &= \int \lim_{n \rightarrow +\infty} |g_n|^p d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |g_n|^p d\mu \\ &\leq 2^p \end{aligned}$$

donc $g \in L^p$ (et $\|g\|_p \leq 2$).

On a $\forall s > r$, pour μ -presque tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |h_r(x) - h_s(x)| &= \left| \sum_{n=r}^{s-1} (h_{n+1}(x) - h_n(x)) \right| \\ &\leq \sum_{n=r}^{s-1} |h_{n+1}(x) - h_n(x)| \\ &\leq h_{s-1}(x) - g_{r-1}(x) \\ &\leq g(x) - g_{r-1}(x) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

donc $(h_n(x))_n$ est de Cauchy donc converge vers une limite notée $h(x)$.

Comme on a montré que pour μ -presque tout $x \in \Omega$, $|h_r(x) - h_s(x)| \leq g(x) - g_{r-1}(x) \leq g(x)$ avec $g \in L^p$, on a alors d'une part que $|h(x)| \leq g(x) + |h_n(x)|$ donc $h \in L^p$ et d'autre part que $\|h_r - h\|_p^p \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ d'où $(h_r)_r$ converge vers h dans L^p .

On a finalement une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge, or $(f_n)_n$ est de Cauchy donc elle converge vers h . □

Remarques :

- Il faut savoir montrer ce dernier point.
- On a même montré plus fort dans le cas $p < \infty$: si une suite $(f_n)_n$ est de Cauchy, non seulement elle a une limite mais il existe même une sous-suite qui converge presque partout vers cette limite. La suite $(f_n)_n$ ne converge pas presque partout en général, il faut savoir trouver un contre-exemple. Dans le cas L^∞ , la convergence L^∞ implique la convergence presque partout comme le montre la preuve. La réciproque est fautive : considérer x^n sur $[0,1]$