

Étude de la fonction de Weierstrass : Soient $0 < a < 1, b > 1$ tq $ab \geq 1$.

$$f: x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(2\pi b^k x) \quad f \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ dérivable nulle part.}$$

On fixe $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} v=0 \text{ hors de } [\frac{1}{b}, b] \\ v(1) = 1 \end{cases}$

On dispose de $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tq $\hat{u}=v$.

Lemme : Si f est bornée et continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $t \in \mathbb{R}$, alors $b^{-2\ell} C_\ell(f, t) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$
où $C_\ell(f, t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) u[b^\ell(s-t)] ds$.

preuve : On écrit $f(s) = f(t) + f'(t)(s-t) + r(s-t)$ où $\frac{r(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

$$\text{Soit } \ell \in \mathbb{N}, \text{ calculons, } C_\ell(f, t) = f(t) \int_{\mathbb{R}} u[b^\ell(s-t)] ds + f'(t) \int_{\mathbb{R}} (s-t) u[b^\ell(s-t)] ds + \int_{\mathbb{R}} r(s-t) u[b^\ell(s-t)] ds.$$

$$\begin{aligned} 1) \int_{\mathbb{R}} u[b^\ell(s-t)] ds &= b^{-\ell} \int_{\mathbb{R}} u(x) dx \quad \text{via } x = b^\ell(s-t) \quad dx = b^\ell ds. \\ &= b^{-\ell} \hat{u}(0) \\ &= b^{-\ell} v(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_{\mathbb{R}} (s-t) u[b^\ell(s-t)] ds &= b^{-2\ell} \int_{\mathbb{R}} b^\ell(s-t) u[b^\ell(s-t)] ds \\ &= b^{-2\ell} \int_{\mathbb{R}} x u(x) dx \quad \text{via } x = b^\ell(s-t) \quad dx = b^\ell ds. \\ &= \frac{b^{-2\ell}}{-2i\pi} \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi x) u(x) dx \\ &= -\frac{b^{-2\ell}}{2i\pi} \widehat{(-2i\pi x) u(x)} \\ &= -\frac{b^{-2\ell}}{2i\pi} \hat{u}'(0) \\ &= -\frac{b^{-2\ell}}{2i\pi} v'(0) = 0 \quad \text{car } v=0 \text{ dans un voisinage de } 0. \end{aligned}$$

3) Fixons $\varepsilon > 0$, soit $\delta > 0$ tq $(|h| \leq \delta) \Rightarrow (|r(h)| \leq \varepsilon |h|)$

$$\text{On écrit alors } \left| \int_{\mathbb{R}} r(s-t) u[b^\ell(s-t)] ds \right| \leq \int_{|s-t| \leq \delta} |r(s-t)| |u[b^\ell(s-t)]| ds$$

$$+ \int_{|s-t| > \delta} |r(s-t)| |u[b^\ell(s-t)]| ds$$

$$\textcircled{1} \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |s-t| |u[b^\ell(s-t)]| ds$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon b^{-2\ell} \int_{\mathbb{R}} |x| |u(x)| dx \quad x = b^\ell(s-t) \quad dx = b^\ell ds \\ &\leq \varepsilon b^{-2\ell} \|xu\|_{L^1}. \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} : f(s) = f(t) + f'(t)(s-t) + r(s-t)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } |r(s-t)| &\leq |f(t)| + |f(s)| + |f'(t)(s-t)| \\ &\leq 2\|f\|_\infty + |f'(t)| |s-t| \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \textcircled{2} \leq \int_{|s-t| > \delta} \frac{|r(s-t)|}{|s-t|^3} |s-t|^3 |u[b^\ell(s-t)]| ds$$

$$\leq \int b^{-3\ell} \int_{|s-t| > \delta} \frac{|r(s-t)|}{|s-t|^3} \underbrace{|[b^\ell(s-t)]^3 u[b^\ell(s-t)]|}_{\leq \|x^3 u\|_\infty} ds$$

$$\leq b^{-3\ell} \|x^3 u\|_\infty \left[2\|f\|_\infty \int_{|s-t| > \delta} \frac{1}{|s-t|^3} ds + |f'(t)| \int_{|s-t| > \delta} \frac{1}{|s-t|^2} ds \right]$$

$$\leq b^{-3\ell} \|x^3 u\|_\infty C_\delta.$$

Finalement, $|b^{2q} c_j(\beta, t)| \leq b^{2q} (|\textcircled{1}| + |\textcircled{2}|)$
 $\leq \varepsilon \|x\|_1 + b^{-2q} C_5 \|x^3 u\|_\infty$

Donc $\lim_{q \rightarrow +\infty} |b^{2q} c_j(\beta, t)| \leq \varepsilon \|x\|_1$

Donc $\lim_{q \rightarrow +\infty} b^{2q} c_j(\beta, t) = 0$.

fin de la preuve du lemme. $\square$.

Théorème (preuve): f est bornée et f est continue. Pour $s \in \mathbb{R}$, $f(s) := 2 \sum_{q=1}^{+\infty} a^q \cos(2\pi b^q s)$
 $= \sum_{q=1}^{+\infty} a^q (e^{2i\pi b^q s} + e^{-2i\pi b^q s})$

Fixons $t \in \mathbb{R}$ et voyons que f n'est pas dérivable en t .

Calculons pour ce faire pour $j \in \mathbb{N}$.

$c_j(\beta, t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) u[b^j(s-t)] ds$ TCD?
 $= \sum_{q=1}^{+\infty} a^q (\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi b^q s} u[b^j(s-t)] ds}_{\textcircled{A}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi b^q s} u[b^j(s-t)] ds}_{\textcircled{B}})$ Contre-exemple non trivial. Fubini, Tonelli, Fubini

$\textcircled{A} = b^{-j} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi b^q s} x e^{2i\pi b^q t} u(x) dx$
 $= e^{2i\pi b^q t} b^{-j} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi (-b^q - j) x} u(x) dx$
 $= e^{2i\pi b^q t} b^{-j} \hat{u}(-b^q - j)$
 $= 0$

$\textcircled{B} = b^{-j} e^{-2i\pi b^q t} \hat{u}(b^q - j)$
 $= b^{-j} e^{-2i\pi b^q t} \delta_{j \neq b^q}$

Donc $c_j(\beta, t) = a_j b^{-j} e^{-2i\pi b^j t}$

Donc $|b^{2j} c_j(\beta, t)| = (ab)^j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$

Par ~~l'opérateur~~ le lemme, f n'est pas dérivable en t .

Ça fournit aussi un contre-exemple à :

f n'est dérivable
 et f n'est convexe $\Rightarrow f$ n'est dérivable.