

235
236
239
245 (methode 2)

Intégrale de Dirichlet

- Calcul intégral, Camdelpenghen, p 30 et 212
- Analyse pour l'ingénierie, Bernis, p 262
- Osmi x-ENS, Analyse 3, F6N, p 214

Théorème : L'intégrale impropre du sinus cardinal sur $\mathbb{R}^+$ vaut $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

CAN 212

Première méthode : théorème de Fubini

Soit $A > 0$. On pose $f:]0; A[\times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto e^{-xy} \sin(x)$

Alors f est intégrable sur $]0; A[\times]0; +\infty[$
 d'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} & \int_{]0; A[\times \mathbb{R}_+^*} |f(x, y)| dx dy \\ &= \int_0^A \int_0^{+\infty} e^{-xy} |\sin x| dy dx \\ &= \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) |\sin x| dx \\ &= \int_0^A \left[\frac{e^{-xy}}{-x} \right]_0^{+\infty} |\sin x| dx \quad \text{Car } |\sin x| \leq 1 \\ &= \int_0^A |\sin x| \frac{1}{x} dx \leq \int_0^A 1 dx = A < +\infty \end{aligned}$$

Soit $I_A = \int_{]0; A[\times]0; +\infty[} f(x, y) dx dy$

Alors d'après le théorème de Fubini-Lebesgue :

$$\begin{aligned} I_A &= \int_0^A \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy \right) \sin(x) dx \\ &= \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

et $I_A = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^A e^{-xy} \sin(x) dx \right) dy$

On écrit alors $e^{-xy} \sin(x) = e^{-xy} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
 $= \frac{e^{(-y-i)x} - e^{(-y+i)x}}{2i}$

et alors:

$$\begin{aligned}
 \int_0^A e^{-xy} \sin(x) dx &= \int_0^A \frac{e^{(i-y)x} - e^{(-i-y)x}}{2i} dx \\
 &= \frac{1}{2i} \left(\left[\frac{e^{(i-y)x}}{i-y} \right]_0^A - \left[\frac{e^{(-i-y)x}}{-i-y} \right]_0^A \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{(i-y)A} - 1}{i-y} + \frac{e^{(-i-y)A} - 1}{i+y} \right) \\
 &= \frac{1}{2i} \left(\frac{(i+y)e^{(i-y)A} - i - y + (-i-y)e^{(-i-y)A} - i + y}{-1 - y^2} \right) \\
 &= \frac{-2i + e^{-yA}(e^{iA} + e^{-iA})i + ye^{-yA}(e^{iA} - e^{-iA})}{-2i(1+y^2)} \\
 &= \frac{1 - e^{-yA} \cos(A) - ye^{-yA} \sin(A)}{1+y^2}
 \end{aligned}$$

On peut aussi passer par la partie imaginaire (c'est fait dans le 6-K):

$$\begin{aligned}
 \int_0^A e^{-xy} \sin x dx &= \int_0^A e^{-xy} \operatorname{Im}(e^{ix}) dx \\
 &= \int_0^A \operatorname{Im}(e^{x(i-y)}) dx = \operatorname{Im} \left(\int_0^A e^{x(i-y)} dx \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{x(i-y)}}{i-y} \right]_0^A \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{A(i-y)} - 1}{i-y} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{y-i} \right) - \operatorname{Im} \left(\frac{e^{A(i-y)}}{y-i} \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left(\frac{y+i}{y^2+1} \right) - \operatorname{Im} \left(\frac{(y+i)e^{A(i-y)}}{y^2+1} \right) \\
 &= \frac{1 - e^{-yA} \cos(A) - ye^{-yA} \sin A}{1+y^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
 I_A &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yA} (\cos A + y \sin A)}{1+y^2} dy \\
 &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} g_A(y) dy
 \end{aligned}$$

↙ a peut prendre $A \geq 1$

On $|g_A(z)| \leq \frac{e^{-z}(1+z)}{1+z^2}$ qui est ind $\leq$ de A et
est en $O\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$ donc $\in L^1([0, +\infty[)$

Ainsi par TCD, $g_A(z) \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}_+^*$
alors $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_A(z) dz = 0$

D'où : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} I_A = \frac{\pi}{2}$

BER 262

Deuxième méthode : par l'analyse complexe

Soit $\varepsilon > 0$ et $R > \varepsilon$. Alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx$$

On :

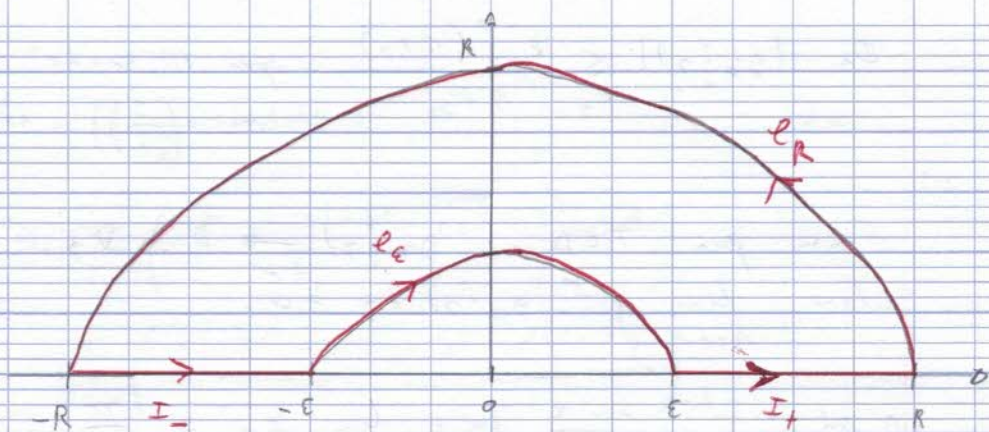
$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin t}{t} dt &= \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{t} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} dt \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-it}}{t} dt \right) \quad \begin{matrix} u = -t \\ t = -u \\ dt = -du \end{matrix} \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-it}}{t} dt \right) \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} & \text{qui est une fonction} \\ z &\mapsto \frac{e^{-iz}}{z} & \text{holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

On regarde alors le lacet γ par morceaux
orienté positivement : $\gamma = \gamma_{\varepsilon} \cup \gamma_+ \cup \gamma_R \cup \gamma_-$

dont la définition est donnée par le dessin :



Comme f n'admet pas de pôle à l'intérieur de γ , d'après le théorème de Cauchy (car f holomorphe dans un ouvert simplement connexe qui contient γ qui est fermé),

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

$$\text{donc : } \int_{I_-} f(z) dz + \int_{C_\epsilon} f(z) dz + \int_{I_+} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

On :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{-iR\sin\theta}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi |e^{-iR\sin\theta}| d\theta \leq \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta \end{aligned}$$

On applique $\theta \mapsto e^{-R\sin\theta}$ CV-presque partout vers la fonction nulle sur $[0, \pi]$ quand $R \rightarrow +\infty$, et est majorée par 1 qui est intégrable sur $[0, \pi]$

Ainsi d'après le TCD : $\int_{C_R} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

De même, C_ϵ est paramétré dans le sens indirect donc $\int_{C_\epsilon} f(z) dz = -i \int_0^\pi e^{i\epsilon\sin\theta} d\theta$

Comme l'appli $\theta \mapsto e^{i\epsilon\sin\theta}$ converge vers 1 sur $[0, \pi]$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, et est dominée par 1, par le TCD : $\int_{C_\epsilon} f(z) dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -i\pi$

On fait alors tendre R vers $+\infty$ et ε vers 0 et :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{it}}{t} dt \right) = -\pi$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{2} \times -\pi = -\frac{\pi}{2}$

FGN 214

Troisième méthode : par la transformée de Laplace

On pose $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$

Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car se prolonge par continuité en 0 par 1 et pour $t \rightarrow +\infty$, $f(x, t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Et en $x=0$, on peut montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ CV (voir les remarques).

On peut alors définir la transformée de Laplace du sinus cardinal sur $\mathbb{R}_+$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt \quad \forall x \geq 0$$

Montrons que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

On le fait en fait sur les intervalles $[a, +\infty[$.

Soit $a > 0$.

• La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$
 et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \cdot \sin(t)$

• $\forall x \geq a$, on a : $\forall t \geq 0$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} \cdot |\sin t| \leq e^{-at} \in L_1(\mathbb{R}_+^*)$$

Ainsi d'après le théorème de dérivation sous le

siège intégral, on a que F est de classe C^1 sur $[a; +\infty[\forall a > 0$, et donc comme la dérivation et continuité sont des propriétés locales, F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus :

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, dt = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{Im}(e^{it}) \, dt$$

$$= - \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} \, dt \right)$$

$$= - \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x} \right]_0^{+\infty} \right)$$

$$= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{i-x} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{i+x}{-1-x^2} \right) = \frac{-1}{1+x^2}$$

regarder
en module

En primitivant, $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > 0$,

$$F(x) = C - \arctan(x)$$

$$\text{Or } |F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} \, dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{car } |\sin x| \leq |x|$$

$$\text{Donc : } C = \frac{\pi}{2}$$

Pour montrer que $F(0) = \frac{\pi}{2}$, on veut donc mq F est continue en 0.

Comme le sinus cardinal n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$, on ne peut pas faire le th de continuité sous l'intégrale.

Il y a 2 pb de CV : en 0 et en $+\infty$.

On sépare en 2 :

$$F_1(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, dt$$

• F_1 est en fait C^1 sur $\mathbb{R}^+$ car on a :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| = |e^{-xt} \sin t| \leq 1 \in L^1([0, 1])$$

$$F_2(x) = \text{Im} \left(\int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{e^{it}}{t} dt \right) = \text{Im} \left(\int_1^{+\infty} \overbrace{\frac{e^{t(i-x)}}{t}}^{b(x)} dt \right)$$

Soit $x > 1$. On part une IPP:

$$\int_1^x \frac{e^{t(i-x)}}{t} = \left[\frac{e^{t(i-x)}}{i-x} \frac{1}{t} \right]_1^x + \frac{1}{i-x} \int_1^x \frac{e^{t(i-x)}}{t^2} dt$$

Comme $\left| \frac{e^{t(i-x)}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ alors cette fct est intégrable

$$\text{et } b(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{t(i-x)}}{t^2} dt$$

Alors en utilisant le théorème de continuité sous le signe intégrale, b est continue sur $\mathbb{R}^+$

Comme la partie Imaginaire est aussi continue, on en déduit que F_2 est continue sur $\mathbb{R}^+$

Donc F continue sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{Finalement: } F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Remarques

CAN 30 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

En effet, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$ et se prolonge en 0 par 1 car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Il n'y a donc pas de problème en 0.

Soit $A > 1$. Alors par IPP:

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{\sin x}{x} dx &= \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2} dx \\ &= \frac{-\cos(A)}{A} + \cos(1) - \int_1^A \frac{\cos(x)}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{On } \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\cos A}{A} = 0 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{donc la 2e}$$

intégrale CV quand $A \rightarrow +\infty$.

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx < +\infty$.

CAN 30 • En revanche, cette intégrale n'est pas ACV.

$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge

Dém: en a

$$\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

On: $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{u+k\pi} du$ $y = x - k\pi$

$$\geq \int_0^{\pi} \frac{|\sin u|}{\pi + k\pi} du$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{k+1} \int_0^{\pi} |\sin u| du = \frac{2}{\pi} \frac{1}{k+1}$$

Et $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{\pi} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$ car série harmonique

Donc: $\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$