

## PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : ENDOMORPHISMES SEMI-SIMPLES

TONY LIMAGNE

Le développement ci-dessous est adapté pour les leçons 150, 151, 148 et 152.

Dans toute cette fiche,  $K$  désigne un corps et  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. On fixe  $u \in L(E)$  et on note  $\pi_u$  le polynôme minimal de  $u$ .

### 1. DÉVELOPPEMENT

On dit que  $u$  est *semi-simple* si tout sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$  admet un supplémentaire dans  $E$  encore stable par  $u$ .

**Lemme 1.** Si  $\pi_u$  est irréductible sur  $K$  alors  $u$  est semi-simple.

*Démonstration.* Soit  $F$  un sous-espace vectoriel  $u$ -stable de  $E$  distinct de  $E$  et  $\{0\}$ . Fixons  $a \in E \setminus F$  et posons

$$F_1 = \{P(u)(a) : P \in K[X]\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel  $u$ -stable propre ( $a$  est dans  $F_1$  sans être nul) et strict ( $a$  est dans  $F_1$  sans être dans  $F$ ). On montre que  $F$  et  $F_1$  sont en somme directe. Supposons qu'il existe  $x \in F_1 \cap F$  *non nul*, noté  $x = P(u)(a)$ . Comme  $P(u) \neq 0$  alors  $\pi_u$  ne divise pas  $P$ . Et puisque  $\pi_u$  est irréductible alors  $P$  et  $\pi_u$  sont premiers entre eux dans  $K[X]$ . Par le théorème de Bézout, il existe  $U, V \in K[X]$  tel que

$$U\pi_u + VP = 1.$$

On a donc à la fois  $V(u)(x) = a \notin F$  et  $V(u)(F) \subseteq F$  (car  $F$  est  $u$ -stable) : absurde. Si  $E \neq F_1 \oplus F$  on réitère le procédé en remplaçant  $F$  par  $F_1 \oplus F$ . Comme  $E$  est de dimension finie, ce procédé permet de construire une liste finie de sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_r$  stables par  $u$  et distincts de  $\{0\}$  et  $E$  qui vérifient

$$E = F \oplus (F_1 \oplus \dots \oplus F_r),$$

Le sous-espace  $F_1 \oplus \dots \oplus F_r$  est bien un supplémentaire  $u$ -stable de  $F$ , d'où le résultat.  $\square$

**Définition 2.** Un polynôme non constant  $f \in K[X]$  est dit *sans facteur carré* lorsque tout polynôme  $P \in K[X]$  tel que  $P^2$  divise  $f$  est constant.

**Théorème 3.** L'endomorphisme  $u$  est semi-simple si et seulement si  $\pi_u$  est sans facteur carré.

*Démonstration.* Décomposons  $\pi_u$  en produit d'irréductibles dans  $K[X]$

$$\pi_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}.$$

Par le lemme des noyaux on a

$$E = \underbrace{\ker(P_1^{\alpha_1}(u))}_{=N_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{\ker(P_r^{\alpha_r}(u))}_{=N_r}.$$

Soient  $F$  un sous-espace vectoriel  $u$ -stable de  $E$  et  $F_k = N_k \cap F$ . On a

$$F = \bigoplus_{k=1}^r F_k.$$

En effet, la projection  $p_k$  sur  $N_k$  parallèlement à  $\bigoplus_{k \neq l} N_l$  est un polynôme en  $u$  de sorte que

$$p_k(F) \subseteq F_k.$$

Et puisque  $\text{id}_E = \sum_{k=1}^r p_k$  on a alors

$$F = \sum_{k=1}^r p_k(F) \subseteq \bigoplus_{k=1}^r F_k \subseteq F.$$

$\boxed{\Leftarrow}$  Comme  $\pi_u$  est sans facteur carré alors nécessairement  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 1$ . Pour  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  on note

$$u_k = u|_{N_k},$$

Comme  $P_k$  est irréductible, unitaire et annule  $u_k$  alors  $\pi_{u_k} = P_k$ . Le lemme 1 garantit donc que  $u_k$  est semi-simple. Soit  $G_k$  un supplémentaire  $u_k$ -stable (donc  $u$ -stable) de  $F_k$  dans  $N_k$ . On a alors

$$E = \bigoplus_{k=1}^r N_k = \bigoplus_{k=1}^r (F_k \oplus G_k) = \left( \bigoplus_{k=1}^r F_k \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^r G_k \right) = F \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^r G_k \right),$$

et donc  $u$  est semi-simple.

$\boxed{\Rightarrow}$  Par l'absurde supposons  $u$  semi-simple et soit  $P$  un facteur carré *non constant* de  $\pi_u$  dans  $K[X]$ . Notons  $\pi_u = P^2 Q$  dans  $K[X]$ . Soit  $H$  un supplémentaire  $u$ -stable de  $G = \ker(P(u))$ . Comme  $H$  est  $u$ -stable et par définition de  $G$  on a

$$PQ(u)(H) \subseteq G \cap H = \{0\}, \quad \text{et} \quad PQ(u)(G) = \{0\},$$

si bien que  $PQ(u) = 0$ , ce qui contredit la minimalité de  $\pi_u$ .  $\square$

Référence : [G, Chap. 4, §5, Problème 22].

**Exercice 4.** Montrer que  $u$  est semi-simple si et seulement si  $K[u]$  est un produit de corps.

Référence : [BMP, Chap. 4, §4.6, Exercice 4.23].

## 2. STABILITÉ PAR EXTENSION DE CORPS

**2.1. Corps parfait.** Le corps  $K$  est dit *parfait* lorsque toute extension algébrique de  $K$  est séparable.

**Lemme 5.** Le corps  $K$  est parfait si et seulement si

- (1) ou bien  $K$  est de caractéristique 0;
- (2) ou bien  $K$  est un corps de caractéristique  $p > 0$  et son morphisme de Frobenius est surjectif.

*Démonstration.* On rappelle qu'un polynôme irréductible  $f \in K[X]$  est séparable si et seulement si  $f' \neq 0$ . Et ainsi :

- (1) Si  $K$  est de caractéristique 0 alors  $f$  est séparable ;
- (2) Si  $K$  est de caractéristique  $p > 0$  alors  $f$  est séparable si et seulement si  $f \notin K[X^p]$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Si  $K$  est de caractéristique 0 alors  $K$  est parfait. Par l'absurde, supposons que  $K$  est de caractéristique  $p > 0$ , de morphisme de Frobenius surjectif mais non parfait. Comme  $K$  est non parfait, il existe un polynôme irréductible  $f \in K[X]$  de la forme  $f(X) = Q(X^p)$  avec  $Q \in K[X]$ . Et puisque le morphisme de Frobenius de  $K$  est surjectif alors  $f(X) = Q(X)^p$  ce qui contredit l'irréductibilité de  $f$  sur  $k$ .

$\boxed{\Rightarrow}$  Par l'absurde, supposons  $K$  parfait, de caractéristique  $p > 0$  mais de morphisme de Frobenius non surjectif. Puisque le morphisme de Frobenius de  $K$  est non surjectif, il existe  $\alpha \in K$  tel que  $x^p \neq \alpha$  pour tout  $x \in K$ . Posons  $f(X) = X^p - \alpha$  qui vérifie  $f' = 0$ . Il suffit de montrer que  $f$  est irréductible sur  $K$ , ce qui contredira le fait que  $K$  est parfait. Écrivons  $f = f_1 f_2$  en un produit de facteurs non triviaux dans  $K[X]$ . Soit  $\beta$  une racine  $p^e$  de  $\alpha$  dans  $\bar{K}$ . On a  $f(X) = (X - \beta)^p$  dans  $K[X]$  et donc  $f_i = (X - \beta)^{r_i}$  dans  $\bar{K}[X]$  (ici  $1 \leq r_1, r_2 \leq p - 1$ ). Les entiers  $r_1$  et  $r_2$  sont premiers entre eux (puisque  $r_1 + r_2 = p$  avec  $p$  premier). Il existe donc  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $r_1 u + r_2 v = 1$  et donc  $f_1^u f_2^v = X - \beta$  dans  $\bar{K}[X]$ . Mais les polynômes  $f_1$  et  $f_2$  sont dans  $K[X]$  si bien que  $X - \beta \in K[X]$  c'est-à-dire  $\beta \in K$ . Absurde.  $\square$

**2.2. Lien entre diagonalisabilité et semi-simplicité.** Une matrice  $A \in M_n(K)$  est dite *semi-simple* lorsque son polynôme minimal  $\pi_A$  est sans facteur carré. Fixons  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Le théorème 3 montre qu'une matrice  $A \in M_n(K)$  est semi-simple si et seulement si l'endomorphisme  $v$  qui lui est associé dans la base  $\mathcal{B}$  est semi-simple (parce que  $\pi_A = \pi_v$ ).

**Théorème 6.** Si  $A$  est diagonalisable sur une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$  alors  $A$  est semi-simple. La réciproque est fausse en général mais elle est vraie lorsque  $K$  est un corps parfait. (En particulier, si  $K$  est de caractéristique 0 alors  $A$  est diagonalisable sur  $\bar{K}$  si et seulement si  $A$  est semi-simple.)

*Démonstration.* Supposons  $A$  diagonalisable sur  $\bar{K}$ . Le polynôme minimal  $\pi_{\bar{K}}$  de  $A$  sur  $\bar{K}$  est donc scindé à racines simples sur  $\bar{K}$  (et donc sans facteur carré dans  $\bar{K}$ ). On note  $\pi_K$  le polynôme minimal de  $A$  sur  $K$ . Puisque  $\pi_K(A) = 0$  alors  $\pi_K$ , vu comme polynôme à coefficients dans  $\bar{K}$ , vérifie  $\pi_{\bar{K}} | \pi_K$  dans  $\bar{K}[X]$ . Ensuite, on sait que le degré de  $\pi_{\bar{K}}$  est le rang de la famille  $\{I_n, A, \dots, A^n\}$  qui ne dépend pas du corps de base, si bien que  $\deg(\pi_{\bar{K}}) = \deg(\pi_K)$ . Et puisque  $\pi_K$  et  $\pi_{\bar{K}}$  sont tous deux unitaires, on peut enfin affirmer que  $\pi_K = \pi_{\bar{K}}$ . En particulier,  $\pi_K$  est sans facteur carré dans  $\bar{K}[X]$  et donc aussi dans  $K[X]$ . Ainsi la matrice  $A$  est semi-simple. Supposons  $K$  parfait et  $A$  semi-simple. On note  $\pi_A$  le polynôme minimal de  $A$  sur  $K$ . Montrons d'abord que  $\pi'_A \neq 0$ . Si  $K$  est de caractéristique 0, on a bien  $\pi'_A \neq 0$  puisque  $\pi_A$  est non constant. Si  $K$  est de caractéristique  $p$  et si  $\pi'_A = 0$  alors il existe  $P \in K[X]$  tel que  $\pi_u(X) = P(X^p)$ . Et puisque  $K$  est parfait, le morphisme de Frobenius de  $K$  est surjectif de sorte que  $\pi_u(X) = Q(X)^p$  et  $\pi_A$  admet donc  $Q(X)$  pour facteur carré. Absurde. On a donc  $\pi'_A \neq 0$ . Et puisque  $\pi_A$  est sans facteur carré on a

$$\text{pgcd}_{K[X]}(\pi_A, \pi'_A) = 1 = \text{pgcd}_{\bar{K}[X]}(\pi_A, \pi'_A).$$

Ainsi  $\pi_A$  est sans facteurs carré dans  $\bar{K}[X]$ , donc  $\pi_A$  est produit de polynômes de degré 1 deux à deux distincts, donc  $A$  est diagonalisable sur  $\bar{K}$ .  $\square$

Référence : [BMP, Chap. 6, §6.6, Exercice 6.8].

**Contre-exemple 7.** On se place sur le corps non parfait  $K = \mathbb{F}_2(T)$ . On considère l'endomorphisme  $u : K^2 \rightarrow K^2$  dont la matrice dans la base canonique de  $K^2$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & T+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A = X^2 + T$  qui est irréductible sur  $K$ . A fortiori, le polynôme minimal de  $A$  sur  $K$  est irréductible et donc  $A$  est semi-simple. Par contre,  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\bar{K}$ . En effet, si tel était le cas on aurait  $\chi_A = (X + \alpha)^2$  avec  $\alpha \in \bar{K}$ , et  $A$  la matrice scalaire de rapport  $\alpha$ . Absurde.

### 3. QUELQUES QUESTIONS BÊTES AUXQUELLES IL FAUT ABSOLUMENT SAVOIR RÉPONDRE RAPIDEMENT

- (1) Supposons  $E = E_1 \oplus E_2$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . A-t-on toujours  $F = (E_1 \cap F) \oplus (E_2 \cap F)$  ?
- (2) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Montrer que si  $u$  est semi-simple alors  $u|_F$  est encore semi-simple.
- (3) À quelle condition un endomorphisme nilpotent est-il semi-simple ?

### RÉFÉRENCES

- [G] X. Gourdon, *Algèbre et probabilités*, 3<sup>e</sup> édition, Ellipses, 2020.  
 [BMP] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré, *Objectif agrégation*, 2<sup>e</sup> édition, H&K, 2005.