

Inversion de Fourier dans L^1

Nico

Prérequis : Intégrale de Gauss, Principe du prolongement analytique, Transformée de Fourier dans L^1 , Approximation de l'unité

On admet connue la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\forall a > 0, \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (1)$$

On énonce le résultat principal :

Inversion de Fourier dans L^1 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Si $\widehat{f} \in L^1$, alors :

$$\text{pour presque tout } t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

On montrera d'abord le lemme suivant :

Transformée de Fourier de la Gaussienne : Soit $a > 0$, alors

$$x \mapsto \widehat{e^{-ax^2}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}\xi^2}, \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Méthode 1 : (Cool mais pas de réf pour le moment)

Démonstration. Notons $g_a : x \mapsto e^{-ax^2}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $g_a \in L^1(\mathbb{R})$.

On peut alors définir sa transformée de Fourier :

$$\widehat{g_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-it\xi} e^{-at^2}}_{g(\xi, t)} dt$$

Montrons que $\widehat{g_a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On souhaite appliquer le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale :

i) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(\xi, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$

ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto g(\xi, t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, t) = -ite^{-it\xi}e^{-at^2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

iii) Pour tout $\xi, t \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, t) \right| \leq te^{-at^2}$ qui est intégrable positive sur $\mathbb{R}$

Ainsi par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, $\xi \mapsto \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\widehat{g}_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{g}_a'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ite^{-it\xi}e^{-at^2} dt$$

On souhaite réécrire la formule obtenue. On souhaite alors procéder à une intégration par partie. Soit $m, M \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$:

$$I(m, M) := -i \int_m^M te^{-it\xi}e^{-at^2} dt$$

On pose $v'(t) = te^{-at^2}$ et $u(t) = e^{-it\xi}$. Alors $v(t) = -\frac{1}{2a}e^{-at^2}$ et $u'(t) = -i\xi e^{-it\xi}$. Alors :

$$I(m, M) = \left[ie^{-it\xi} \frac{1}{2a} e^{-at^2} \right]_{t=m}^{t=M} - \int_m^M \frac{1}{2a} e^{-at^2} \xi e^{-it\xi} dt \xrightarrow[m \rightarrow -\infty]{M \rightarrow +\infty} 0 - \frac{\xi}{2a} \widehat{g}_a(\xi)$$

D'où $\widehat{g}_a$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + \frac{\xi}{2a}y = 0$. D'où $\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g}_a(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

Or :

$$C = \widehat{g}_a(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt \stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

D'où

$$\widehat{g}_a(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

□

Montrons maintenant le théorème principal :

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que " $\varepsilon = 2a$ " dans (??).

Montrons dans un premier temps que le théorème est vrai pour le noyau de Gauss

$$\gamma_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \widehat{g_{\frac{\varepsilon}{2}}} \stackrel{(\text{??})}{=} \xi \mapsto \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{\xi^2}{2\varepsilon}} :$$

$$\widehat{\gamma_\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \widehat{g_{\frac{1}{2\varepsilon}}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \gamma_{\varepsilon^{-1}}$$

D'où

$$\widehat{\widehat{\gamma_\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} \widehat{\gamma_{\varepsilon^{-1}}} = 2\pi \gamma_\varepsilon$$

Par parité de γ_ε , il vient que

$$\gamma_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} \widehat{\gamma_\varepsilon}(t) dt \quad (2)$$

Plus généralement, soit f vérifiant les hypothèse de l'énoncé, montrons que $\gamma_\varepsilon * f$ vérifie le résultat. On conclura ensuite en montrant que γ_ε est une approximation de l'unité (noyau de Gauss). Le théorème de Young nous donne que $f * \gamma_\varepsilon \in L^1$, $\widehat{f * \gamma_\varepsilon} \in L^1$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{f * \gamma_\varepsilon}}(-\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \widehat{f * \gamma_\varepsilon}(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} \widehat{f}(t) \widehat{\gamma_\varepsilon}(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \widehat{\widehat{\gamma_\varepsilon e^{i\xi \cdot}}}(t) dt \text{ par formule de dualité} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi-t)y} \widehat{\gamma_\varepsilon}(y) dy dt \\ &\stackrel{(2)}{=} 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t) \gamma_\varepsilon(\xi - t) dt \text{ par parité de } \gamma_\varepsilon \\ &= 2\pi (f * \gamma_\varepsilon)(\xi) \end{aligned} \quad (3)$$

Montrons alors que γ_ε est une approximation de l'unité

i) $\gamma_\varepsilon \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \int_{\mathbb{R}} \gamma_\varepsilon(t) dt = \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon}} dt \stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} \sqrt{2\pi\varepsilon} = 1$

iii) Soit $\delta > 0$, $\int_{|t|>\delta} \gamma_\varepsilon(t) dt \stackrel{\sqrt{\varepsilon}x=t}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{\sqrt{\varepsilon}|x|>\delta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{TCVD}} 0$

D'où $\|f * \gamma_\varepsilon - f\|_{L^1} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0$. De plus, par linéarité et Riemann-Lebesgue :

$$\|\widehat{\widehat{f * \gamma_\varepsilon}} - \widehat{f}\|_\infty \leq \|f * \gamma_\varepsilon - f\|_1$$

Montrons qu'une telle quantité tend vers 0 :

$$\|f * \gamma_\varepsilon - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |(f * \gamma_\varepsilon - f)(\xi)| d\xi$$

On cherche à appliquer le TCVD :

1. $f * \gamma_\varepsilon - f \in L^1$.
2. $f * \gamma_\varepsilon - f \rightarrow 0$ presque partout, donc par continuité, de $f \mapsto \widehat{f}$, $f * \gamma_\varepsilon - f \rightarrow 0$ presque partout.
3. $|f * \gamma_\varepsilon - f| \leq |\widehat{f} \gamma_\varepsilon| + |f| \leq 2|\widehat{f}| \in L^1$

D'où $\|\widehat{f * \gamma_\varepsilon} - \widehat{f}\|_\infty \rightarrow 0$. D'où par passage à la limite dans (3) et théorème de Riesz-Fischer :

$$\text{pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}, f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-\xi)$$

□

Questions de jury ?

Question 1. *Enoncer le théorème de Riesz-Fischer*

Question 2. *Soient $(f_n)_n \in L^1 \cap \mathcal{C}_b$, $f \in L^1$ et $g \in \mathcal{C}_b$.*

Justifier que si $\|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\|f_n - g\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors $f = g$ pp

Question 3. *Soit $\mathcal{F} : (L^1, \|\cdot\|_{L^1}) \rightarrow (\mathcal{C}_b^0, \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto \widehat{f}$. Justifier que $\mathcal{F}$ a un sens, est linéaire et est continue. Montrer de plus qu'elle est injective. Finalement, interpréter le résultat de l'inversion de Fourier pour $\mathcal{F}$.*

Question 4. *Montrer que $\widehat{f\widehat{g}} = \widehat{f * g}$ lorsque ça a un sens*

Question 5. *Montrer la formule de dualité*

Question 6. *[El 08] Résoudre l'équation intégrale d'inconnue y :*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y(t)dt}{(x-t)^2 + a^2} = \frac{1}{x^2 + b^2} \quad (0 < a < b)$$

Question 7. *Montrer que si $f, g, \widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$, alors $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}$*

Question 8. *On a une égalité presque partout, étudier l'ensemble sur lequel on a égalité. Que se passe-t-il si f est supposée continue ?*

Éléments de réponses (pas toutes vérifiées)

Question 1 : Soit $1 \leq p \leq +\infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors $L^p(\Omega)$ est complet. De plus, si pour $(f_n)_n \subseteq L^p(\Omega)$, $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} f$, alors il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui converge simplement vers f presque partout dans Ω .

Question 2 : Par le théorème de Riesz-Fischer, il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_n$ tel que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge simplement presque partout vers f . De plus, $(f_{\varphi(n)})_n$ converge uniformément donc simplement vers g . D'où $f = g$ pp.

Question 3 : Par le théorème de Riemann-Lebesgue, $\mathcal{F}$ a un sens. De plus $\mathcal{F}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale, et encore par Riemann Lebesgue :

$$\forall f \in L^1, \|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$$

D'où $\mathcal{F}$ est continue. Montrons l'injectivité sans utiliser le résultat sur l'inversion de Fourier :

Soit $f \in L^1$ telle que $\widehat{f} = 0$. Alors $\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\varepsilon x^2}{2}} e^{itx} \widehat{f}(x) dx = 0$$

D'où par formule de dualité, pour $\gamma_\varepsilon : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$ par (??) :

$$\int_{\mathbb{R}} \gamma_\varepsilon(t-x) f(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$$

Par approximation de l'unité. D'où par identification :

$$f = 0 \text{ pp}$$

□

Via l'inversion de Fourier, le résultat est immédiat. Si $\widehat{f} = 0$, alors $f = \widehat{\widehat{f}} = 0$ pp

Question 4 : Si $f, g \in L^1$:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t-x) dx dt \quad (*)$$

Puisque $f, g \in L^1$, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$(*) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} g(t-x) dt dx \stackrel{y=t-x}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(x+y)} g(y) dy dx = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$$

Question 5 : Soit $f, g \in L^1$. alors par inégalité de Hölder, $f\hat{g} \in L^1$, $\hat{f}g \in L^1$. De plus :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)dt dx \quad (*)$$

Puisque $f, g \in L^1$, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$(*) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx} dx dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt$$

Question 6 : ...

Question 7 : Soit $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{fg}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(t)g(t)dt \quad (*)$$

Par inversion de Fourier :

$$(*) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(t) \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{g}(x) dx dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\xi-x)} \hat{g}(x) dx dt$$

D'où par Fubini ($f, \hat{g} \in L^1$) :

$$(*) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-it(\xi-x)} f(t) dt dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x) \hat{f}(\xi - x) dx = \frac{1}{2\pi} (\hat{g} * \hat{f})(\xi)$$

Référence

EL AMRANI, Mohammed (2008). *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses.

QUEFFELEC, Hervé (2020). *Analyse pour l'agrégation*. 5eme edition. Dunod.

Recasages

Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications. (?)

Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Leçon 234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.