

Développement II-10

Résolution d'une équation différentielle par DSE

Leçons :

- 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.
- 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
- 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Référence :

- Florent Berthelin, *Équations différentielles*, Chapitre 4, point 6, page 147

1 Contenu des plans

1.1 Leçons 220 & 221

Proposition (**Abaissement de l'ordre**) Soit $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ une équation différentielle linéaire de degré 2, et soit $y_1(t)$ une solution particulière. En posant $y(t) = y_1(t)z(t)$, y est solution si et seulement si :

$$(y_1(t)^2 z')' + p(t)(y_1(t)^2 z') = 0$$

Et $z'(t) = A \frac{1}{y_1(t)^2} e^{-P(t)}$ où P est une primitive de p et $A \in \mathbb{R}$.

Méthode. L'équation différentielle linéaire :

$$(E): (t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0$$

admet $\frac{1}{1+t}$ comme solution particulière développable en série entière sur $] -1, 1[$.

L'ensemble des solutions de (E) s'écrit $S = \text{Vect}\left(\frac{1}{1+t}, \frac{\ln|t|}{1+t}\right)$.

1.2 Leçons 228 & 241 & 243

Application. Recherche de solutions d'équations différentielles : L'équation différentielle linéaire :

$$(E): (t^2 + t)y'' + (3t + 1)y' + y = 0$$

admet $\frac{1}{1+t}$ comme solution particulière développable en série entière sur $] -1, 1[$.

L'ensemble des solutions de (E) s'écrit $S = \text{Vect}\left(\frac{1}{1+t}, \frac{\ln|t|}{1+t}\right)$.

2 Structure des développements

Le développement est trop long si on détaille tout, il faut faire des choix.

2.1 Leçons 220 & 221

- Détailler le calcul de la première solution avec le DSE
- Il doit rester 3 min pour écrire l'équation que satisfait la deuxième solution recherchée par abaissement de l'ordre (et aussi pourquoi on en cherche 2), et pour donner le résultat.

2.2 Leçons 228 & 241 & 243

- Détailler le développement en séries entières, les propriétés et théorèmes de régularité (hypothèses et confirmation que ça marche pour les DSE) qui permettent de calculer une solution.
- Un bref mot sur la deuxième suffit, les équations différentielles n'étant pas le sujet de ces leçons.

3 Développement détaillé

Méthode. L'équation différentielle linéaire :

$$(E): (t^2 + t) y'' + (3t + 1) y' + y = 0$$

admet $\frac{1}{1+t}$ comme solution particulière développable en série entière sur $] -1, 1[$.

L'ensemble des solutions de (E) s'écrit $S = \text{Vect}\left(\frac{1}{1+t}, \frac{\ln|t|}{1+t}\right)$.

Démonstration. En 2 étapes :

→ Étape 1 : Recherche de solutions développables en séries entières

On recherche une solution de (E) sur un intervalle $] -R, R[$ de la forme :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on a immédiatement :

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

et :

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n$$

Alors on peut réécrire l'équation différentielle (E) :

$$\begin{aligned} & (t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)a_n + (n+1)na_{n+1} + 3na_n + (n+1)a_{n+1} + a_n)t^n + t(4a_2 + 4a_1) + a_1 + a_0 \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} (n+1)^2(a_n + a_{n+1})t^n \end{aligned}$$

Alors, par unicité du développement en série entières, on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} + a_n = 0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n a_0$ et $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 (-1)^n t^n = a_0 \frac{1}{1+t}$ sur $] -1, 1[$.

Et cette solution est prolongeable sur $] -1, +\infty[$ et son expression est solution sur $] -\infty, 1[$.

→ Étape 2 : Détermination de tout l'ensemble des solutions par abaissement de l'ordre

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, $\dim(S) = 2$.

Alors il existe une solution indépendante des précédentes, qu'on recherche sous la forme :

$$y(t) = \frac{1}{1+t} z(t)$$

Alors $y(t)$ est solution si et seulement si (d'après l'abaissement de l'ordre) :

$$\frac{1}{(1+t)^2} z'' - \frac{2}{(1+t)^3} z' + \frac{3t+1}{t^2+t} \left(\frac{1}{(1+t)^2} z' \right) = 0$$

Et comme $(1+t)^2 \geq 0$ est non-nul pour $t \neq -1$, on a :

$$z'' + \left(-\frac{2}{1+t} + \frac{3t+1}{t^2+t} \right) z' = z'' + \left(\frac{-2t^2 - 2t + (3t+1)(1+t)}{t(t+1)^2} \right) z' = z'' + \frac{1}{t} z' = 0$$

On en tire $z'(t) = \frac{A}{t}$ et $z(t) = A \ln|t| + B$. Alors :

$$y(t) = \frac{A \ln|t| + B}{1+t}, A, B \in \mathbb{R}$$

□