Dantzer
Gourdon
Barbé, Ledoux
dev 1 : Isenmann
Pecatte
dev 2 : Rouvière

# Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et application à la résolution approchée d'équations.

## I - Généralités

**Définition 1.1** Soit $E$ un ensemble non vide. Une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $E$ est dite récurrente d'ordre 1 s'il existe une fonction $f : E \longrightarrow E$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**Définition 1.2** Plus généralement, une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $E$ est dite récurrente d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $f : E^k \longrightarrow E$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = f(u_n, \dots, u_{n+k-1})$.

**Remarque 1.3** Il est primordial que l'espace d'arrivée soit inclus dans le domaine de définition des variables de la fonction, de sorte que la suite soit bien définie.

### 1. Cadre réel

On se place dans le cadre $E = \mathbb{R}$.

**Définition 1.4** Une suite réelle $(u_n)_n$ vérifiant la relation de récurrence : pour tout $n$ $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, est dite arithmético-géométrique. On a alors :

- si $a \neq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{b}{1-a} + a^n \left( u_0 - \dfrac{b}{1-a} \right)$

- si $a = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + bn$. On dit alors que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $b$.

**Définition - Proposition 1.5** Dans le cas particulier où $b = 0$, on dit que la suite est géométrique de raison $a$. On a alors $u_n = a^n u_0$, donc si $|a| < 1$ la suite converge vers $0$, si $a = 1$ la suite est constante et si $|a| > 1$ la suite diverge.

**Exemples 1.6**
La suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2(1-u_n) \end{cases}$ est une suite arithmético-géométrique. Elle vérifie :

- si $u_0 \neq \frac{2}{3}$ alors $\lim |u_n| = +\infty$
- si $u_0 = \frac{2}{3}$ alors $(u_n)_n$ est constante égale à $\frac{2}{3}$

**Proposition 1.7** Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : I \longrightarrow I$. On a alors :

(i) si $f$ est croissante alors $(u_n)_n$ est monotone

(ii) si $f$ est décroissante alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de variation opposés

### 2. Cadre vectoriel

On se place dans le cadre $E = \mathbb{R}^d$.

**Exemple 1.8**
Soit $X_0 \in \mathbb{R}^d$, une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ avec $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est une suite récurrente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient : $X_n = A^n X_0$.
Dans des cadres particuliers, par exemple lorsque $A$ est diagonalisable, on sait alors exprimer explicitement $X_n$ en fonction de $n$.

**Application 1.9** Soient $z_1, \dots, z_n$ $n$ points du plan complexe donnés par leur affixe. Ils définissent dans cet ordre, un polygone $P$ donné par la liste de ses sommets. On définit par récurrence la suite de polygones $(P_k)_k$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de $P_{k+1}$ sont les milieux des arêtes de $P_k$. Alors, la suite $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de $P$. développement 1

**Remarque 1.10** Avoir une suite récurrente d'ordre $k$ est équivalent à avoir une suite vectorielle récurrente d'ordre 1. Ainsi, le traitement du cas de l'ordre 1 que suggère le titre de la leçon englobe en fait les suites récurrentes de tout ordre.

**Exemple 1.11**
On considère la suite réelle $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$

L'étude de cette suite revient à l'étude de la suite $(U_n)_n$ de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} U_n$$

On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^n - 3^n$$

**Définition 1.12** (cas particulier) On dit qu'une suite $(u_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifie une récurrence linéaire homogène d'ordre $k$ à coefficients constants si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n$ avec $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$.

L'équation $x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k = 0$ s'appelle l'équation caractéristique de la récurrence.

**Proposition 1.13** Plaçons-nous sous les hypothèses de la définition précédente. Soient $r_1, \dots, r_s$ les racines du polynôme caractéristique, de multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Alors, l'ensemble des suites $(u_n)_n$ vérifiant la relation de récurrence est l'ensemble des suites de la forme $u_n = P_1(n) r_1^n + \dots + P_s(n) r_s^n$ où $P_i$ est un polynôme vérifiant $\deg P_i < \alpha_i$.

## II - Points fixes et suites récurrentes

### 1. Théorèmes de point fixe

**Proposition 2.1** Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un élément $u^*$ et si $f$ est continue en $u^*$, alors $u^*$ est un point fixe de $f$.

**Exemples 2.2**

- Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto \frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Alors $(u_n)_n$ converge vers un réel qui n'est pas un point fixe de $f$.

- Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto \frac{e^{-x}}{x}$ et $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Alors, la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe de $f$.

**Théorème 2.3** (Point fixe de Picard) Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante. Alors $f$ admet un unique point fixe et toute suite récurrente de la forme $\begin{cases} u_0 \in E \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers ce point fixe.

**Proposition 2.4** En remplaçant le caractère contractant de $f$ par l'existence d'un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{\circ p}$ soit une fonction contractante, les conclusions sont inchangées.

**Définition - proposition 2.5** Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l \in \mathring{I}$ un point fixe de $f$. Si $f$ est dérivable en $l$ et vérifie $|f'(l)| < 1$, on dit que $f$ est un point attractif.

Le cas échéant, il existe $\alpha > 0$ tel que toute suite de la forme $\begin{cases} u_0 \in ]l-\alpha, l+\alpha[ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est définie et converge vers $l$.

**Définition - proposition 2.6** Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l \in \mathring{I}$ un point fixe de $f$. Si $f$ est dérivable en $l$ et vérifie $|f'(l)| > 1$, on dit que $l$ est un point fixe répulsif.

Le cas échéant, si une suite de la forme $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est convergente vers $l$, elle est stationnaire. Si de plus $f$ est injective, alors elle est constante.

**Exemples 2.7**

- $\cos : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ admet un unique point fixe attractif
- $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto \frac{e^{-x}}{x}$ admet un unique point fixe répulsif
- $\sin : ]0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow ]0, \frac{\pi}{2}]$ définit une suite récurrente équivalente à $\sqrt{\frac{3}{n}}$
- $\operatorname{sh} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définit une suite récurrente qui diverge vers $+\infty$

### 2. Application aux probabilités

On se place dans un cadre où $X$ définit un ensemble fini ou dénombrable.

**Définition 2.8** Une matrice stochastique est un élément $P = (p_{i,j})_{i,j \in X}$ tel que chacune de ses lignes soit une probabilité sur $X$ i.e. $p_{i,j} \geq 0$ et $\sum_{j \in X} p_{i,j} = 1$.

**Définition 2.9** Une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires à valeurs dans $X$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $P$ et de loi initiale $\mu$ si $X_0 \sim \mu$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = p_{i_n, i_{n+1}}$.

**Exemples 2.10**

Soient $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$.

Alors $P$ est une matrice stochastique et le diagramme correspondant est :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "1-\alpha"] \arrow[r, bend right, "\alpha"'] & 2 \arrow[loop right, "1-\beta"] \arrow[l, bend right, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

**Proposition 2.11** Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov à valeurs dans $X$, supposé fini de cardinal $m$, de matrice de transition $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Alors, la suite $(\mu_n)_n$ des lois de la chaîne en chaque temps $n$ est définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n P$.

**Définition 2.12** Une mesure de probabilité $\mu$ est dite invariante pour la chaîne de Markov de matrice de transition $P$ si elle vérifie $\mu = \mu P$.

**Exemples 2.13**

- $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ admet une unique mesure invariante $\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ admet une infinité de mesures de probabilité invariantes

## 3. Approximation d'un zéro

**Remarque 2.14** (Idée) D'après ce qui précède, l'utilisation de suites récurrentes permet l'approximation de points fixes de la fonction par laquelle la suite est définie. On cherche à résoudre d'autres équations du type zéro d'une fonction en se ramenant à un problème de point fixe.

**Théorème 2.15** (Méthode de Newton) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a,b]$. Considérons la suite récurrente définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. On obtient alors :

(i) $f$ s'annule en un unique point $c$ et il existe $\alpha > 0$ tel que, dès lors que $x_0 \in I = [c-\alpha, c+\alpha]$, la suite converge quadratiquement vers $c$

(ii) si $f'' > 0$ alors le résultat du (i) est vrai pour $I = [c,b]$, $(x_n)_n$ est une suite décroissante et $x_{n+1} - c \sim \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(c)}(x_n - c)^2$

développement 2

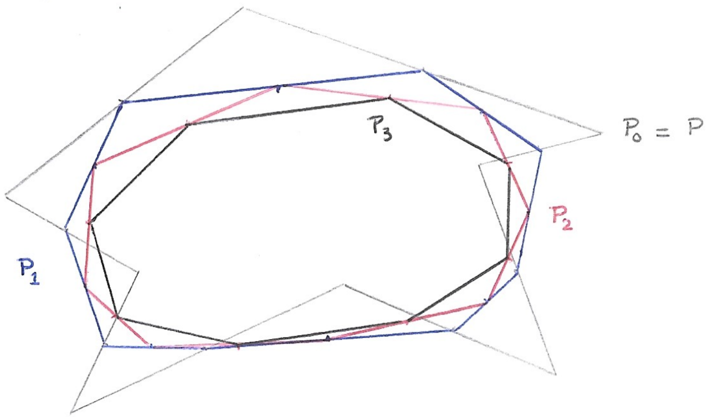
**Exemples 2.16**

- en considérant $f : x \longmapsto x^2 - x - 1$, on peut approcher le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- méthode de Héron : en considérant $f : x \longmapsto x^2 + y$ on peut approcher $\sqrt{y}$ par la suite vérifiant $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)$

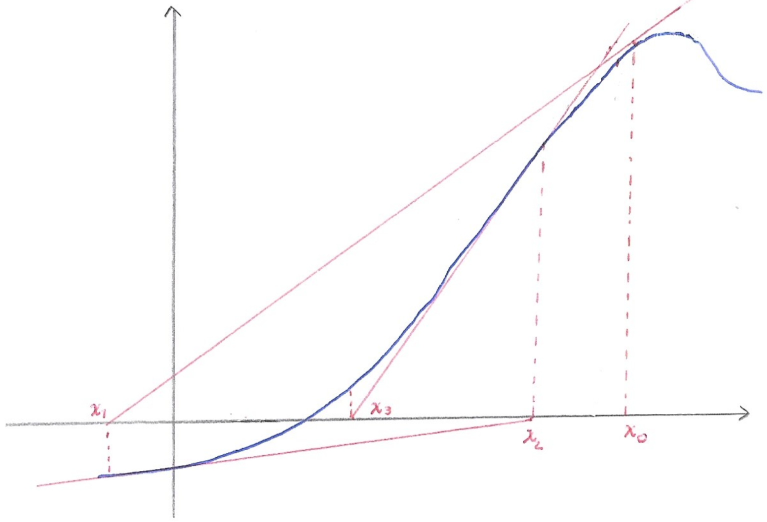
**Proposition 2.17** (Méthode de la sécante) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) > 0$. Alors, la suite définie par : $a_0 = a$ et $a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$ est croissante et converge vers la solution de $f(x) = 0$.

# Annexe

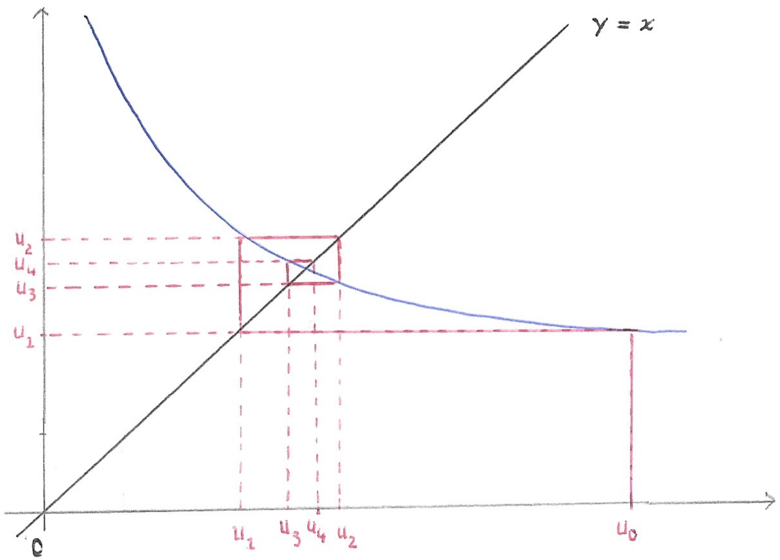
## Application 1.9




## Théorème 2.15




## Exemple de construction de suite récurrente




## Proposition 2.16