262

Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Dans toute la leçon, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $(E, \mathcal{E})$ est un espace euclidien muni d'une tribu (pour $E = \mathbb{R}^d$, on prendra $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$), et $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires de Ω dans E, et X également.

I - Convergence d'une suite de variables aléatoires

A - Définitions, propriétés et premiers exemples

[CR] 49 49 49 57

Def 1 : ▸ On dit que $(X_n)_n$ converge *presque sûrement* vers X, et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, si :
$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)\}) = 1$$

▸ On dit que $(X_n)_n$ converge *en probabilité* vers X, et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

▸ On dit que $(X_n)_n$ converge dans L^p vers X, et on note $X_n \xrightarrow{L^p} X$, si :
$$\mathbb{E}[\|X_n - X\|^p] \longrightarrow 0$$

▸ On dit que $(X_n)_n$ converge en loi vers X, et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ou $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{P}_X$, si : $\forall h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive ou continue bornée, $\mathbb{E}[h(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[h(X)]$

Ex 2 : ▸ Soit $(X_n)_n$ telle que $nX_n \sim \mathcal{R}(1/2)$. Alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$.

▸ Soit $(X_n)_n$ telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{n}$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

▸ Soit $(Y_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, posons $X_n = \prod_{k=1}^{n} Y_k$. Alors $X_n \xrightarrow{L^1} 0$ si, et seulement si $0 < \lambda < 1$.

▸ Soit $(X_n)_n$ telle que $X_n \sim \mathcal{E}(1 - \frac{1}{n})$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1)$.

[GK] 265 265 268 296

Prop 3 : ▸ Si f est continue sur E et si $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, alors $f(X_n) \xrightarrow{p.s.} f(X)$.

▸ $(X_n, Y_n) \xrightarrow{p.s.} (X, Y) \iff X_n \xrightarrow{p.s.} X$ et $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$

▸ Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$ et $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$.

▸ Si f est continue sur E et si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} f(X)$.

[CR] 61

Lemme 4 (de Slutsky) : Supposons que $E = \mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, a)$.

B - Caractérisations

Def 5 : Soit $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. On définit : [CR] 16

▸ $\liminf_{n \to +\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang$\} = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p$

▸ $\limsup_{n \to +\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ appartient à une infinité de $A_n\} = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p$

Prop 6 : ▸ $X_n \xrightarrow{p.s.} X \iff \forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}(\limsup_{n \to +\infty} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0$. [GK][CR] 267 415

▸ $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \forall \varepsilon > 0, \ \limsup_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

Lemme 7 (de Borel - Cantelli) : Soit $(A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. [CR] 16

▸ Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n \to +\infty} A_n) = 0$

▸ Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ si les A_n sont indépendants, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n \to +\infty} A_n) = 1$

Rq 8 : L'indépendance est cruciale : prendre A_n constante. [CR] 16

Cor 9 : ▸ Si $\forall \varepsilon > 0, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$. [CR] 51

▸ Si les X_n sont indépendantes, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < +\infty$

Ex 10 : ▸ Si $(X_n)_n$ est une suite de v.a.i. telles que $\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = p_n$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ si $p_n = \frac{1}{n^2}$, mais pas si $p_n = \frac{1}{n}$.

▸ Si $(X_n)_n$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$, alors $\frac{\max_{1 \leq k \leq n} X_k}{\ln(n)} \xrightarrow{p.s.} 1$

Thm 11 (de Lévy) : ▸ $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in E, \ \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)$. [CR] 57 58

▸ Si $\varphi_{X_n} \longrightarrow \varphi$ avec φ continue en 0, alors φ est la fonction caractéristique d'une loi μ, et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mu$.

Thm 12 : Supposons que $E = \mathbb{R}$. Alors : **DEV 1.a** [CR] 58
$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff (\forall t \in \mathbb{R}, \ F_X \text{ continue en } t \Rightarrow F_{X_n}(t) \longrightarrow F_X(t))$$

[CR] 59 **Rq 13** : La restriction aux points de continuité est essentielle : considérer $(X_n)_n$ telle que $\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1$.

Ex 14 : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Alors $n \min_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(\lambda)$.

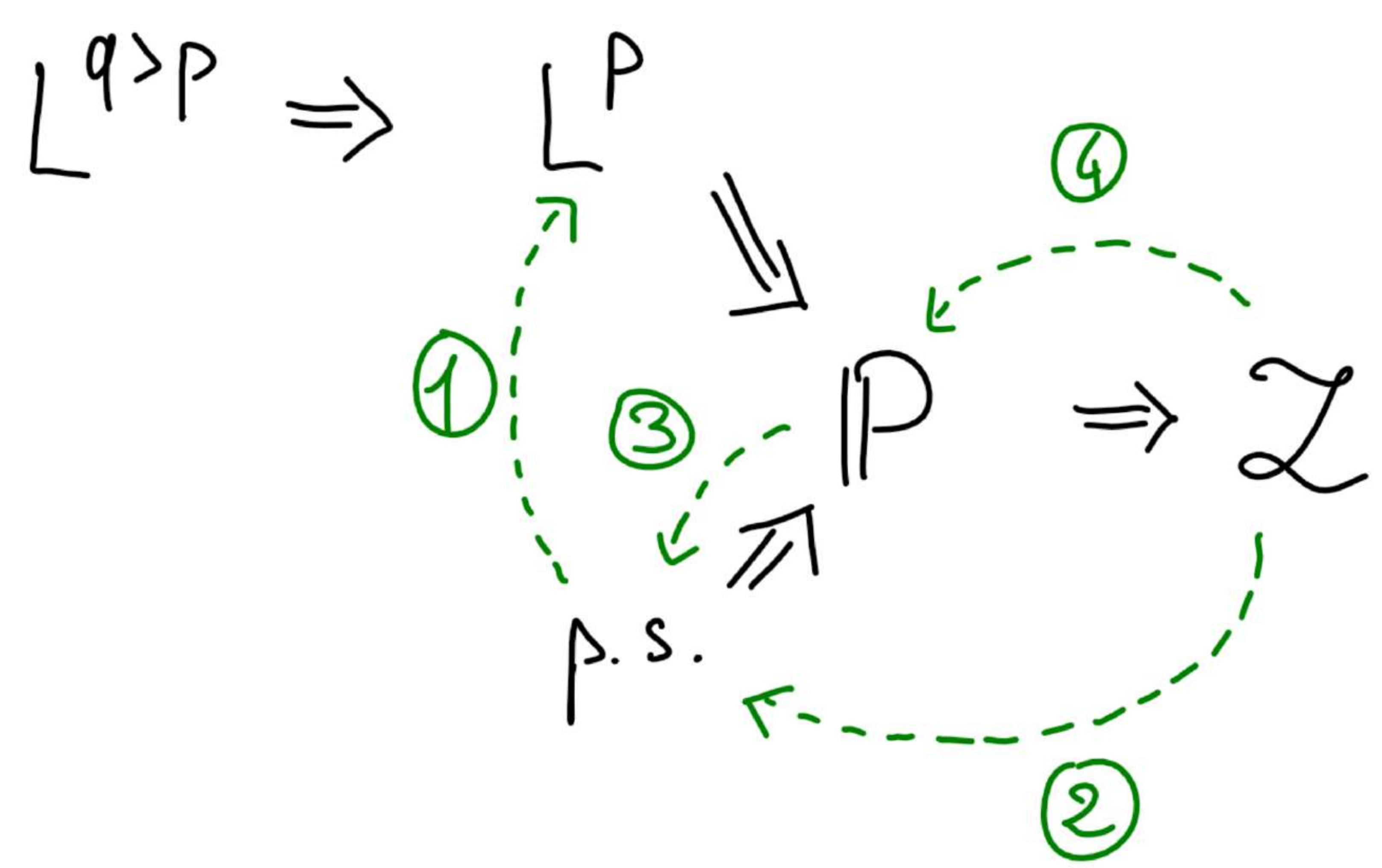
[CR] ~59 **Thm 15** : Si les X_n et X sont à valeurs dans un ensemble dénombrable $E = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n = e_k) \longrightarrow \mathbb{P}(X = e_k)$

[GK] 297 **Appli 16** (approximation binomiale-Poisson) : Soit $(p_n)_n \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que $np_n \longrightarrow \lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$.

DEV 1.b

C- Liens d'implication et contre-exemples

[CR] 50 60 **Thm 17** : Les modes de convergence sont liés par les implications représentées par le diagramme de FIGURE 1 :



Cex 18 :
- $\mathcal{Z} \not\Rightarrow \mathbb{P}$: $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, $X_n = 1 - X$
- $\mathbb{P} \not\Rightarrow$ p.s., $\mathbb{P} \not\Rightarrow L^p$, $L^p \not\Rightarrow$ p.s. : $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$
- p.s. $\not\Rightarrow L^p$: $X_n \sim n^2 \mathcal{B}(1/n^2)$

Thm 19 : On a les réciproques partielles représentées sur FIGURE 1 : [CR] 51 à 50 61
① Avec une hypothèse de domination
② En changeant d'espace probabilisé
③ Pour une sous-suite
④ Si la limite est constante presque sûrement

II - Théorèmes limites en probabilités

On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

A- Lois des grands nombres

Prop 20 : Si $\mathbb{E}[X_n] \longrightarrow a$ et $\mathbb{V}[X_n] \longrightarrow 0$, alors $X_n \xrightarrow{L^2} a$. [CR] 52

Thm 21 (loi faible des grands nombres) : Si $(X_n)_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^{\mathbb{N}}$ est une suite [CR] 55 de v.a.i.i.d., alors $\overline{X}_n \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[X_1]$.

Thm 22 (loi forte des grands nombres) : Si $(X_n)_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^{\mathbb{N}}$ est une suite de [CR] 53 v.a.i.i.d., alors $\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1]$.

Ex 23 : Les moments empiriques sont des estimateurs fortement consistants. [CR] ~173

Appli 24 (Méthode de Monte-Carlo) : Soit $f \in L^1([0,1], \mathbb{R})$. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{p.s.} \int_0^1 f(x)\,dx$.

+ D'EXEMPLES ...

B- Théorème central limite

[CR] 62 **Thm 25** (central limite) : Soit $(X_n)_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^{\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles i.i.d., on note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$.

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n} - m}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

DEV2

Appli 26 : Soient $\alpha \in]0,1[$ et $q_{1-\alpha/2}$ le $(1-\alpha/2)$-quantile de $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, $0<p<1$. L'intervalle :

$$\left[\overline{X_n} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}}\,;\,\overline{X_n} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}}\right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique au niveau de risque α pour p.

[CR] 63 **Thm 27** (central limite multidimensionnel) : Soit $(X_n)_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et i.i.d., notons $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\Gamma = \mathbb{V}[X_1]$. Alors $\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0, \Gamma)$.

RÉFÉRENCES

[GK] Garet - Kurtzmann [2e édition]

[CR] Chabanol - Ruch