

2.2.9 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

I Fonctions monotones

A Définitions et premières propriétés RDO 4.3

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$

Définition 1 : On dit que f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si :
 $\forall (x, y) \in D^2 \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).

On dit que f est monotone si f est croissante ou décroissante. Si les inégalités sont strictes, on parle de monotonie stricte.

Exemple 2 : $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Notation 3 : On note $\mathcal{U}(D)$ l'ensemble des fonctions monotones sur D , $\mathcal{U}_+(D)$ celui des fonctions croissantes et $\mathcal{U}_-(D)$ celui des fonctions décroissantes.

Proposition 4 : Si $f \in \mathcal{U}(D)$ alors f est injective si f est strictement monotone. Dans ce cas f est bijective : $D \rightarrow f(D)$ et f^{-1} est strictement monotone.

Proposition 5 : i) Si $f \in \mathcal{U}_+(D)$ (resp. $f \in \mathcal{U}_-(D)$) et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $\lambda f \in \mathcal{U}_+(D)$ (resp. $\lambda f \in \mathcal{U}_-(D)$).

ii) $\mathcal{U}_+(D) + \mathcal{U}_+(D) \subset \mathcal{U}_+(D)$ et $\mathcal{U}_-(D) + \mathcal{U}_-(D) \subset \mathcal{U}_-(D)$.

iii) Si $(f, g) \in \mathcal{U}_+(D)$ et si $f, g \geq 0$ alors $f \cdot g \in \mathcal{U}_+(D)$.

iv) La composée de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante. La composée d'une application croissante et d'une application décroissante est décroissante.

v) Si $f \in \mathcal{U}_+(D)$ et si $(\forall x \in D) f(x) > 0$ alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{U}_-(D)$.

Exemple 6 : La fonction $\sin$ est une bijection croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$ de réciproque $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ strictement croissante.

Théorème 7 (limite monotone) Soit $f \in \mathcal{U}(D)$, $a \in \bar{D}$. Alors f admet une limite finie ou infinie en a .

Corollaire 8 : Si $f \in \mathcal{U}_+(D)$ et $a \in \bar{D}$ alors f admet une limite finie en a si et seulement si f est majorée sur $D \cap]a, +\infty[$.

Corollaire 9 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $f \in \mathcal{U}(I)$, $a \in I$. Si $a \neq \sup I$, f admet une limite

B Régularité des fonctions monotones RDO 4.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème 10 : Si $f \in \mathcal{U}(I)$ alors l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Théorème 11 : Si $f \in \mathcal{U}(I)$, alors f est continue sur I si $f(I)$ est un intervalle.

Corollaire 12 : Si f est continue et strictement monotone alors $f(I)$ est un intervalle et $g : I \rightarrow f(I)$ est un homéomorphisme.

Théorème 13 : Si $f \in \mathcal{U}(I)$ et dérivable à droite en $\dot{I}$. Alors :

i) f est constante si $\forall t \in \dot{I} \quad f'_d(t) = 0$

ii) f est croissante si $\forall t \in \dot{I} \quad f'_d(t) \geq 0$

iii) $f \in \mathcal{U}_-(I)$ si $\forall t \in \dot{I} \quad f'_d(t) \leq 0$

iv) f strictement croissante (resp. décroissante) si $f'_d > 0$ (resp. $f'_d < 0$) et l'ensemble $X = \{t \in \dot{I}, f'_d(t) = 0\}$ ait son intérieur vide.

Exemple 14 : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante car $f'_d = 3x^2 \geq 0$.

C Théorèmes de Dini X.G 4.3 + exo

Définition 15 : On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. uniformément continue) si :

$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

(resp. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$).

Remarque 16 : La convergence uniforme implique la convergence simple.

Exemple 17 : La réciproque est fautive, par exemple $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$ mais pas uniformément.

Théorème 18 (Dini) Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ suite croissante convergent simplement vers $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors (f_n) converge uniformément vers f .

Théorème 19 (Dini) Soit $(f_n) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ suite de fonctions croissantes convergent simplement vers $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Alors (f_n) converge uniformément vers f .

II Fonctions convexes

A Définitions et premières propriétés J'int 3.2 + exo

On considère I convexe de E norm et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition 20: On dit que f est convexe sur I si:

$$\forall (x_1, x_2) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

La fonction f est concave si $-f$ est convexe.

Exemple 21: i) toute fonction affine est convexe

ii) la fonction $x \mapsto |x|$ est convexe.

iii) si f est convexe et concave alors f est affine. L'écriture est vraie.

Proposition 22: Si f et g sont convexes alors $f+g$ est convexe.

Remarque 23: fg n'est pas nécessairement convexe. Par exemple $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes mais pas $x \mapsto x^3$.

Proposition 24: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{J}$ et $g: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$ convexes. Si g est croissante alors $g \circ f$ est convexe.

Remarque 25: L'hypothèse de croissance est cruciale. Par exemple $x \mapsto -x$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes mais pas $x \mapsto -x^2$.

B Caractérisations de la convexité J'int 3.2 + exo.

Théorème 26: f est convexe si et seulement si son épigraphe $E_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$ est convexe.

Application 27: Si f et g sont convexes sur I , alors $\sup(f, g)$ aussi.

Proposition 28: f est convexe sur I si $\forall (x, y, z) \in I^3$ tels que $x < y < z$ alors $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

+ prop. 23 et exo f convexe si $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Application 29: f est affine si f est concave et convexe.

Application 30: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si f est convexe et majorée.

C Régularité des fonctions convexes J'int 3.3

Proposition 31: Si f est dérivable sur I alors f est convexe si et seulement si $f' \in H_+(I)$.

Exemple 32: i) On remarque que $x \mapsto x^2$ est convexe.

ii) $\exp$ est convexe et $\ln$ est concave (resp. sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$).

Corollaire 33: Si f est dérivable deux fois sur I alors f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

III Applications de la notion de monotonie et de convexité

A Inégalités de convexité J'int 3.3 + exo X.G 2.3

Lemme 34: Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\text{Alors } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Application 35 (Hölder) (Minkowski): Soit p, q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ainsi que $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n \geq 0$. Alors:

$$i) \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$ii) \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 36: Si f est convexe et $(\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^p$ tels que $\sum \lambda_i = 1$ alors on a $\forall x_1, \dots, x_p \in I, f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$

Application 37: La moyenne géométrique est plus petite que l'arithmétique.

Proposition 38: Si f est convexe (resp. concave) sur I alors on a:

$$\forall (x, a) \in I^2 \quad f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a) \quad (\text{resp } f(x) \leq f(a) + (x-a)f'(a)).$$

Exemple 39: i) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$

iii) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$

B Méthode de Newton avec une fonction convexe. Res exo 49

Soit $f: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 , on suppose que $c < d, f(c) < 0 < f(d), f' > 0, f'' > 0$.

Lemme 40: f admet un unique zéro $a \in [c, d]$ et $\forall x \in [c, d]$, $\exists z \in [\min(x, a), \max(x, a)]$ tel que $F(x) - a = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x-a)^2$

Lemme 41: il existe $C > 0$ tel que $|F(x) - a| \leq C |x - a|^2 \forall x \in [c, d]$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est F -stable.

Théorème 42 (Newton) Pour tout $x_0 \in I$, $x_n \rightarrow a$ où $\forall m \in \mathbb{N}$, $F(x_m) = x_{m+1}$.

Lemme 43: Si $I = [a, d]$ alors I est F -stable et pour $x_0 \in I$, la suite (x_n) est strictement décroissante (ou croissante) avec $0 \leq x_{n+1} - a \leq C (x_n - a)^2$ et pour $x_0 \neq a$: $x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$

Application 44: Soit $y > 0$ et $f(x) = x^2 - y$ convexe. Alors on peut approcher la valeur de $\sqrt{y}$.

C Minimisation de fonctionnelles quadratiques Rem 5.15 Fra

On considère $A \in S_m^+(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Théorème 45: Soient O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$, $\varphi: O \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in O$. Si φ admet un extremum local en x_0 alors $d\varphi(x_0) = 0$.

Définition 46: On appelle fonctionnelle quadratique associée à A et b la fonction: $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$

Lemme 47: La fonctionnelle quadratique φ associée à A et b est différentiable sur $\mathbb{R}^m$ avec: $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $d\varphi(x) = Ax - b$.

Théorème 48: La solution u du système linéaire $Ax = b$ est le vecteur qui réalise le minimum global de φ .

Lemme 49: $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\langle Ax, x \rangle \geq \lambda_1 \|x\|_2^2$ où $\lambda_1 := \min(\text{Sp}(A) \setminus \{0\})$.

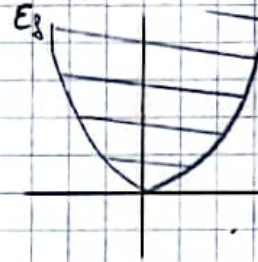
Développement (Méthode de gradient à pas optimal) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}^m$ $\forall m \in \mathbb{N}$, $x_{m+1} = x_m - p_m \nabla \varphi(x_m)$ où $\forall m \in \mathbb{N}$ $p_m = \arg \min_{p \in \mathbb{R}^+} (\varphi(x_m - p \nabla \varphi(x_m)))$ alors $x_n \rightarrow x_*$ où $x_* \in \mathbb{R}^m$ est l'unique minimum global de φ .

Première Méthode Newton comme 1^{er} ordre (avec une pet. modification)

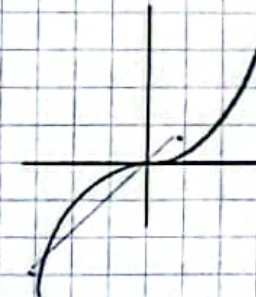
Références :

- Topologie et éléments d'analyse Ramis Derchamps Odoux RDO
- Xavier Gourdon Analyse X.G
- J'intègre MP- MP* J'int
- F. Rouviera Petit guide de calcul différentiel Rou
- Rombaldi Analyse matricielle Rom
- Francimou Chaux XENS Analyse 4 Fna

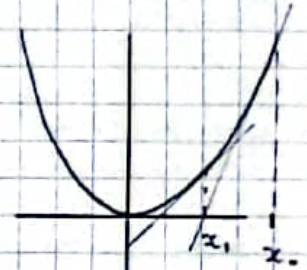
Annexe :



épigraphe de $g: x \mapsto x^2$



$x \mapsto x^3$ n'est pas
convexe



méthode de Newton
tend vers 0