

LEÇON N° 224 : EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE SUITES ET DE FONCTIONS.

$n \in \mathbb{N}$, on considère ici (X, d) un espace métrique.

I/ Comparaison de suites et de fonctions. [G] [WA]

Définition 1 : Échelle de comparaison.

Exemple 2 : Exemple d'échelles de comparaison.

Définition 3 : Définition développement asymptotique et développement limité (lorsque l'échelle choisie est les monômes).

Exemple 4 : Développement asymptotique pour l'échelle $x^\alpha \ln^\beta(x)$ de $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

Proposition 5 : Unicité lorsque l'échelle de précision est fixée.

Théorème 6 : Formule de Taylor-Young.

Application 7 : Théorème Central Limite

Remarque 8 : Pour avoir DL en a il suffit d'avoir le DL en 0 de $x \mapsto f(x+a)$.

Exemple 9 : DL en 0 de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Proposition 10 : On peut sommer et multiplier les DL.

Exemple 11 : DL en 0 de $\frac{e^x}{1+x}$.

Proposition 12 : On peut composer des DL.

Exemple 13 : DL en 0 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

Proposition 14 : Intégration des DL.

Exemple 15 : DL en 0 de Arctan.

Exemple 16 : Les DL usuels en 0 en annexe.

Application 17 : Les DA permettent d'obtenir des informations sur la position des asymptotes.

Remarque 18 : Les notions de développements limités et asymptotiques s'adaptent aux suites de façon équivalente.

II/ Exemples de développements asymptotiques de suites.

A/ Suites et séries numériques. [G]

Théorème 19 : Sommation des équivalents.

Proposition 20 : Comparaison série-intégrale.

Application 21 : Convergence de la série de Bertrand : $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Application 22 : Développement asymptotique à deux termes de la série harmonique.

Exemple 23 : Formule de Stirling obtenue par les intégrales de Wallis.

Définition 24 : Définition des coefficients et polynômes de Bernoulli.

Proposition 25 : Propriété sur ces polynômes.

Théorème 26 : Formule d'Euler Mc-Laurin.

Application 27 : Développement asymptotique à tout ordre de la série harmonique.

B/ Suites récurrentes. [FGNAna1]

Développement 1

Exemple 28 : Développement asymptotique de $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ + application aux cas des fonctions $\sin$ et $\ln(1+\cdot)$.

Exemple 29 : Développement asymptotique à deux termes de $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

C/ Suites définies implicitement. [FGNAna1]

Remarque 30 : Pas de méthode générale mais l'idée de départ est de partir de la relation de définition de la suite.

Exemple 31 : Développement asymptotique de a_n définie comme la plus grande racine de $X^{2n} - 2nX + 1$.

Exemple 32 : Développement asymptotique de $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

III/ Exemples de développements asymptotiques de fonctions.

A/ Fonctions définies par une intégrale. [G] [PGCD]

Théorème 33 : Intégration des relations de comparaison.

Application 34 : Développement asymptotique du logarithme intégral Li .

Développement 2

Théorème 35 : Méthode de Laplace

Application 36 : Formule de Stirling intégrale.

B/ Fonctions définies par la somme d'une série. [G]

Exemple 37 : Équivalent de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ en 1^- .

Exemple 38 : Développement limité de la fonction ζ de Riemann.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 85-93, p. 154, p. 169, p. 200, p. 282 et p. 302
- [PGCD] Rouvière Petit Guide du Calcul Différentiel p. 339
- [FGNAna1] Francinou Gianella Nicolas Analyse 1 p. 99-101 et p. 127-128
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 438