

LEÇON N° 236 : ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES MÉTHODES DE CALCUL D'INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES.

Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Intégration des fonctions scalaires d'une ou plusieurs variables.

A/ À l'aide des primitives. [G] [ROM]

Proposition 1 : Théorème fondamental de l'analyse.

Exemple 2 : Intégrales de Riemann.

Théorème 3 : Décomposition en éléments simples.

Application 4 : La décomposition en éléments simples permet de trouver la primitive de toute fraction rationnelle.

Exemple 5 : Primitive de $x \mapsto \frac{1-x}{(x^2+x+1)^2}$.

B/ À l'aide d'une intégration par parties. [G]

Théorème 6 : Intégration par parties.

Exemple 7 : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente.

Exemple 8 : Formule explicite des intégrales de Wallis.

Exemple 9 : Relation fonctionnelle de la fonction $\Gamma : \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

C/ En utilisant les théorèmes d'intégration. [BP]

Théorème 10 : Lemme de Fatou.

Corollaire 11 : Théorème de convergence monotone.

Théorème 12 : Théorème de convergence dominée.

Exemple 13 : Calcul de $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$ selon les valeurs de α .

Théorème 14 : Théorème de Fubini.

D/ Par changement de variable. [G] [GK]

Théorème 15 : Changement de variable.

Méthode 16 : Règles de Bioche.

Exemple 17 : Changement de variable polaire.

Application 18 : Calcul de l'intégrale de Gauss.

Proposition 19 : Intégrales de fonctions radiales.

Application 20 : Volume de la boule unité euclidienne.

II/ Intégrales dépendant d'un paramètre. [G] [BP] [FGNAna3]

Théorème 21 : Continuité sous signe intégral.

Application 22 : La transformée de Fourier est bien définie et est continue sur $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 23 : Dérivabilité sous signe intégral.

Développement 1

Application 24 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet.

Exemple 25 : La fonction Γ est C^∞ et calcul de ses dérivées.

III/ Utilisation des fonctions holomorphes. [T] [AM]

Théorème 26 : Holomorphie sous signe intégral.

Application 27 : La fonction Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Théorème 28 : Théorème des résidus.

Développement 2

| **Application 29** : Formule des compléments.

| **Exemple 30** : Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle.

| **Application 31** : $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$.

IV/ Par approximation numérique. [DANT] [WA]

| **Méthode 32** : Méthode des rectangles.

| **Proposition 33** : Estimation de l'erreur.

| **Méthode 34** : Méthodes du point milieu

| **Proposition 35** : Estimation de l'erreur.

| **Théorème 36** : Loi forte des grands nombres.

| **Application 37** : Méthode de Monte-Carlo.

Références :

- [G] Gourdon Analyse p. 123, p. 132, p. 146
- [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 399
- [T] Tauvel Analyse complexe pour la licence p. 91 et p. 103
- [BP] Briane Pagès Théorie de l'intégration p. 131
- [DANT] Dantzer Analyse et probabilités p. 490
- [WA] Walter Appel Probabilités pour les Non-Probabilistes p. 212 et p. 536
- [AM] Amar Mathéron Analyse complexe p. 246
- [GK] Garet-Kurtzmann De l'intégration aux probabilités p. 97-98
- [FGNAna3] Francinou Gianella Nicolas Analyse 3 p. 214