

Léçon 253: Utilisation de la notion de convexité en analyse

Références: El Hage Harsany, Hirsch, Romheldi, RDO3, Queffelec, Taubel, Rudin, Debmaz

I - Parties convexes et application

- 1) Notion de partie convexe
- 2) Convexité dans les espaces de Hilbert
- 3) Convexité en analyse complexe

II - Fonctions convexes

- 1) Définition générale
- 2) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$
- 3) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$

III - Applications des fonctions convexes

- 1) Inégalités de convexité
- 2) Etude de la fonction Γ
- 3) Application en probabilités et statistiques

DEV 1 - Etude de la fonction Γ + Bohr - Mollerup

DEV 2 - Processus de Galton - Watson.

Leçon 25.3: Utilisation de la convexité en analyse

Soit E un K -espace vectoriel normé avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Parties convexes et application

1) Notion de partie convexe (HAS)

DEF 1: Soient $x, y \in E$. On appelle segment de E d'extrémités x et y l'ensemble $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

DEF 2: Soit $A \subset E$. On dit que A est convexe lorsque pour tous $x, y \in A$, $[x, y] \subset A$.

DEF 3: Soit $A \subset E$. On dit que A est étoilé lorsqu'il existe $a \in A$ tel que $[a, x] \subset A$ pour tout $x \in A$.

REM 4: A convexe $\Rightarrow A$ étoilé $\Rightarrow A$ convexe par arcs.

EX 5: Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E , pour tout $a \in E$, $a + F$ est convexe.

Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

PROP 6: Soient A, B des convexes de E . Alors

① $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in A^n, \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^n t_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in A$.

② Si $0 \in A$, alors pour tout $0 \leq t \leq 1, tA \subset A$.

③ Pour tout $\lambda \in K, \lambda A$ et $A + B$ sont convexes.

④ Une intersection de convexes est convexe.

PROP 7: $\forall a \in E, \forall r > 0, B(a, r)$ et $\overline{B(a, r)}$ sont convexes.

PROP 8: Soit $A \subset E$ convexe. Alors:

① A et $\bar{A}$ sont convexes.

② Si $\bar{A} \neq \emptyset$, alors pour tout $x_0 \in \bar{A}$, pour tout $x \in \bar{A}$, $[x_0, x] \subset \bar{A}$.

③ Si $\bar{A} \neq \emptyset$, alors on a $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ et $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$.

DEF 9: Soit $A \subset E$. On définit l'enveloppe convexe de A , notée $\text{conv}(A)$ comme l'intersection de tous les convexes de E contenant A . C'est le plus petit convexe contenant A . L'enveloppe convexe fermée de A est l'intersection de tous les convexes fermés contenant A , notée $\overline{\text{conv}(A)}$.

PROP 10: Soit $A \subset E$. Soit $x \in E$. Alors $x \in \text{conv}(A)$ si et seulement si il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^n t_i a_i$ + ajouter Carathéodory [COV].
De plus, $\text{conv}(A) = \overline{\text{conv}(A)}$.

2) Convexité dans les espaces de Hilbert (HIR)

On suppose que E est un espace de Hilbert.

THM 11: Soit $C \subset E$ convexe fermée non vide. Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Ce point, appelé projection de x sur C noté $P_C(x)$ est caractérisé par la propriété suivante: $y \in C$ et $\forall z \in C, \text{Re} \langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.

PROP 12: L'application $P_C: E \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne.

REM 13: La conclusion du théorème reste vraie si on suppose E préhilbertien et C complet.

THM 14: Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E . Alors P_F est linéaire de E dans F . On a $\text{Im}(P_F) = F$, $\text{ker}(P_F) = F^\perp$ et $P_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

PROP 15: Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $E = \bar{F} \oplus F^\perp$. Si F est fermé, $E = F \oplus F^\perp$.

EX 16: Sur $\ell^2(\mathbb{N})$, la projection sur $C = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \forall i \in \mathbb{N}, x_i \geq 0\}$ est $P_C(x) = (\max(x_i, 0))_{i \in \mathbb{N}}$.

COR 17: F est dense dans E ($=, F^\perp = \{0\}$).

3) Convexité en analyse complexe (OUE) [TAU]

THM 18: Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert non vide et soit un triangle plein $A(u, v, w)$ contenu dans Ω (i.e. $\text{conv}(u, v, w) \subset \Omega$). Soit $a \in \Omega$ et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$. Si γ est le bord du triangle orienté positivement, alors $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

THM 19: (Cauchy convexe) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert convexe et $a \in \Omega$. Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur Ω , holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$.

① $\exists F \in H(\Omega), \forall z \in \Omega, F'(z) = f(z)$.

② Pour tout chemin γ tel que $\gamma \subset \Omega$, on a $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

THM 20: Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $a \in \Omega$, $f \in H(U)$. Alors:

① On a f analytique sur Ω , et le rayon de convergence de la série de Taylor de f en a est au moins égal à $d(a, \partial\Omega)$.

② Si Ω est convexe et si γ est un chemin fermé dans Ω tel que $a \notin \text{Int}(\gamma)$, on a:

$$f^{(n)}(a) \text{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds.$$

II - Fonctions convexes

1) Définition générale [RAT] Soit I un convexe de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

DEF 21: On dit que f est convexe lorsque:

$$\forall (x, y) \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

On dit que f est strictement convexe lorsque l'inégalité est stricte.

DEF 22: On dit que f est (strictement) concave lorsque $-f$ est (strictement) convexe.

EX 23: $x \mapsto \|x\|$ est convexe.

Une fonction affine est à la fois convexe et concave.

DEF 24: L'épigraphie de f est $E(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$.

THM 25: f est convexe si et seulement si $E(f)$ est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

RE 26: Une fonction est convexe si et seulement si sa courbe est en-dessous de toutes ses cordes.

PROP 27: Toute combinaison linéaire de fonctions convexes est convexe. La composée $\varphi \circ f$ de φ convexe croissante avec f convexe est convexe.

2) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ [RAT] [PRO]

THM 28: $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. L'ASSE:

(1) f est convexe sur I

(2) $\forall (x, y, z) \in I, x < y < z \Rightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$

(3) $t \in I, x, y \mapsto \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ est croissante

(4) $\forall (x, y, z) \in I, x < y < z \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$.

PROP 29: Si f est convexe sur $I \subset \mathbb{R}$, pour tout $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I$, et tout $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}^+)^n$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, on a $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$.

THM 30: Soit f convexe sur $I \subset \mathbb{R}$. Alors f admet une dérivée à droite et à gauche en tout point $a \in I$. De plus, $f'_g(a) \leq f'_d(a)$, f'_g, f'_d sont croissantes. De plus, f est continue sur I .

THM 31: Soit $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f est convexe sur I si et seulement si elle est continue dérivable à droite sur I de dérivée f'_d croissante.

THM 32: Soit f dérivable sur I . L'ASSE:

(1) f est convexe sur I (2) f' est croissante sur I

(3) f est située au-dessus de toutes ses tangentes.

EX 33: Soit f deux fois dérivable sur I . Alors, f est convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I .

THM 34: Si f est convexe sur I et dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a .

THM 35: Si f convexe sur I admet un minimum local en $a \in I$, ce minimum est global.

DEF 36: Soit $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est log-convexe lorsque $\ln(f)$ est convexe.

PROP 37: Toute fonction log-convexe est convexe.

3) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ [RAT] [PRO]

THM 38: Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U ouvert convexe. Alors f est convexe si et seulement si: $\forall (x, y) \in U, f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)(x-y)$

THM 39: Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ convexe ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Alors f est convexe si et seulement si $h \mapsto d^2 f(a)(h, h)$ est positif pour tout $a \in U$.

EX 40: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

III - Applications des fonctions convexes

1) Inégalités de convexité [R01] Δ et [A00]

PROP 41: Avec la THM 32, on a par exemple:

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(x) \leq x-1$$

PROP 42: (Jensen) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré telle que $\mu(\Omega) = 1$. Soit $f \in L^1(\mu)$ telle que $a \leq f(x) \leq b$ pour tout $x \in \Omega$. Si φ est convexe sur $]a, b[$, alors $\varphi(\int_{\Omega} f d\mu) \leq \int_{\Omega} \varphi(f) d\mu$.

EX 43: $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

LEMME 44: (Young) Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

PROP 45: (Hölder) Soient $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f, g \in L^p(\mu) \times L^q(\mu)$. Alors $fg \in L^1(\mu)$ et: $\int_{\Omega} fg d\mu \leq (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_{\Omega} |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$.

PROP 46: (Minkowski) Soient $f, g \in L^p$. Alors $f+g \in L^p$ et: $(\int_{\Omega} |f+g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_{\Omega} |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_{\Omega} |g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$.

REM 47: Ceci permet de munir $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ d'une structure d'espace vectoriel normé.

2) Etude de la fonction Γ [R01]

DEF 48: Pour $x > 0$, on définit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ DEF 1) 2)

THM 49: Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est de plus log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

LEMME 50: (Euler) $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ DEF 2) 3)

THM 51: (Bohr-Mollerup) Si $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est solution de l'équation $f(x+1) = x f(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f = \lambda \Gamma$.

3) Application en probabilités et statistiques [DELMAS]

REM 52: L'inégalité de Jensen (PROP 42) peut être utilisée pour justifier l'existence et l'unicité de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

REM 53: En probabilités, PROP 42 s'écrit pour $X \in L^1$

$$\varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$$

DEF 54: Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction $G_X: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$.

DEF 55: Soit $(\xi_i)_{i \geq 1}$ une suite v.a. indépendantes identiquement distribuées de carré intégrable.

On note: $\forall k \in \mathbb{N}, p_k = P(\xi_i = k)$, $m = E[\xi_i]$, $\sigma^2 = \text{Var}(\xi_i)$ et $G(s) = G_{\xi_i}(s)$, $s \in [0, 1]$.

On pose $Z_0 = 1$ et $\forall m \in \mathbb{N}, Z_m = \sum_{k=1}^m \xi_k$ (Z_m) est appelé processus de Galton-Watson.

But: On s'intéresse à la probabilité d'extinction $\eta = P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z_n = 0)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0)$.

LEMME 56: G est bien définie sur $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^2$, convexe sur $[0, 1]$.

• G est strictement croissante sur $]0, 1[$.

• G est strictement convexe ($\Leftarrow p_0 + p_1 = 1$).

LEMME 57: Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $G_m(s) = G_0 \dots G_{m-1}(s)$ ou $G_m = G_{Z_m}(s)$. De plus, $E[Z_m] = m^m$.

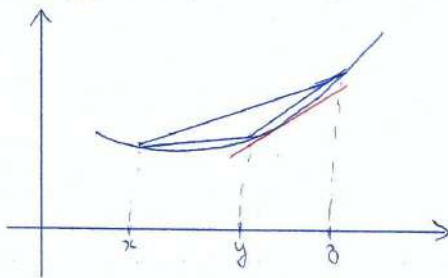
THM 58: On suppose $p_0 \in]0, 1[$.

1) η est la plus petite solution positive de l'équation $G(s) = s$.

2) Si $m \leq 1$, $\eta = 1$.

3) Si $m > 1$, $\eta \in]0, 1[$.

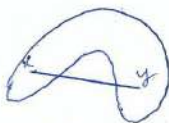
ANNEXE 1: Inégalité des pentes



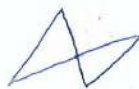
ANNEXE 2:



Ensemble
convexe

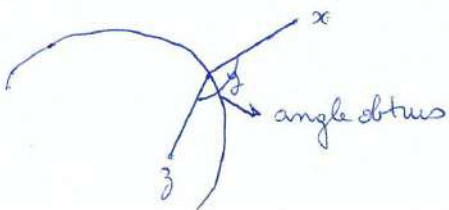


Ensemble non
convexe



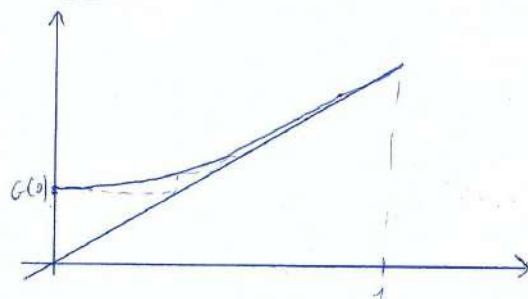
Ensemble
étoilé

ANNEXE 3: Projection sur un convexe fermé



ANNEXE 4: Les différents cas du THM 58

Cas $m \leq 1$



Cas $m > 1$

