

159: Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes

I. Généralités E un $\mathbb{K}$ -ev de dim. $n \in \mathbb{N}^*$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

a) Notion d'adjoint

Prop./def. 1: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$,
 $\exists! f^* \in \mathcal{L}(E)$ tq $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle \forall x, y \in E$.

Si (ei) une base orthonormée et $A = \text{Mat}_{(ei)}(f)$ alors $A^* = \text{Mat}_{(ei)}(f^*)$ est ${}^t A$.

Prop./def. 2: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien, $f \in \mathcal{L}(E)$

$\exists! f^* \in \mathcal{L}(E)$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle \forall x, y \in E$

Si (ei) base orthonormée, $A = \text{Mat}_{(ei)}(f)$ alors $A^* = \text{Mat}_{(ei)}(f^*)$ est ${}^t \bar{A}$

Prop. 3: $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien ou hermitien, $f \in \mathcal{L}(E)$.

$$1) f^{**} = f \quad 4) (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

$$2) \text{Id}^* = \text{Id} \quad 5) \text{rg}(f^*) = \text{rg}(f)$$

$$3) (f+g)^* = f^* + g^*$$

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien: $(f^*)^* = f$ et $\det(f^*) = \det(f)$

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hermitien: $(f^*)^* = \bar{f}$ et $\det(f^*) = \overline{\det(f)}$

b) Définitions et premières propriétés:

Def. 4: On note:

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^t A = A\}$ l'ensemble des matrices symétriques
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^t A = -A\}$ l'ensemble des matrices anti-symétriques
- $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{A} = A\}$ l'ensemble des matrices hermitiennes.

Prop. 5: $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Def. 6: $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, Ax \rangle \geq 0\}$ est l'ensemble des matrices symétriques positives.

$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \langle x, Ax \rangle > 0\}$ est l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

(où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire)

Def. 7: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire hermitien.

$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \mid \forall x \in \mathbb{C}^n, \langle x, Ax \rangle \geq 0\}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes positives.

$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \mid \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \langle x, Ax \rangle > 0\}$ est l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives.

c) Le lien avec les formes quadratiques et hermitiennes

Def. 2: $f: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite bilinéaire si $f(x, \cdot): y \mapsto f(x, y)$ et $f(\cdot, y): x \mapsto f(x, y)$ sont linéaires.

Def. 3: $f: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est dite sesquilinéaire si $f(x, \cdot): y \mapsto f(x, y)$ est antilinéaire et $f(\cdot, y): x \mapsto f(x, y)$ est linéaire.

Def. 10: Soit $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E , pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ dans E , on a:

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j f(e_i, e_j) = {}^t X M Y$$

$$\text{où } M = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Def. 11: Soit f une forme bilinéaire sur E , on dit que

• f est symétrique si $\forall x, y \in E, f(x, y) = f(y, x)$

• f est anti-symétrique si $\forall x, y \in E, f(x, y) = -f(y, x)$

Thm. 12: Soit B une base de E . Une forme bilinéaire f est symétrique (resp. anti) si sa matrice dans la base B est symétrique (resp. anti).

Def. 13: Soit f une forme sesquilinéaire. On dit que f est à symétrie hermitienne si $\forall x, y \in E, f(x, y) = \overline{f(y, x)}$

Thm. 12: Soit B une base de E . Une forme sesquilinéaire f est hermitienne si sa matrice dans la base B est hermitienne.

Prop. 13: Soient B, B' deux bases de E . P la matrice de passage de B à B' . Si f est bilinéaire (resp. sesqui), $M = \text{Mat}_B(f)$, $M' = \text{Mat}_{B'}(f)$. Alors, $M' = {}^t P M P$ (resp. ${}^t \bar{P} M P = M'$).

Def. 14: On appelle forme quadratique $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ (f forme bi et sym.)
 $x \mapsto f(x, x)$

Prop. 5: Soit q une forme quadratique sur E . $\exists! f$ bilinéaire symétrique tq $\forall x \in E, q(x) = f(x, x)$. f est appelée forme polarisée de q et $\forall x, y \in E, f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$

Def. 16: On appelle forme hermitienne $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ (f forme sesqui. hermitienne)
 $x \mapsto f(x, x)$

[BOU]
p. 240
- 242

Prop. 17: Soit b une forme hermitienne. $\exists$ forme sesqui. hermi. φ t.q. $\forall x \in E \quad \phi(x) = \varphi(x, x)$. φ s'appelle forme polaire de ϕ et

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4} (\phi(x+y) - \phi(x-y) + i\phi(x-iy) - i\phi(x+iy))$$

(*) (voir 2e pa. fin $\rightarrow$ ajouter lien forme quad. pers ...)

II - Réduction

a) Théorèmes spectraux et applications (Δ Inverser a) et b) (voir section 2.3.1))

Thm. 18: (Spectral) Toutes matrices symétriques réelles est diagonalisable dans $\mathbb{R}^n$ et les espaces propres sont $\mathbb{R}^2$ orthogonaux.

Rmq. 19: En particulier on peut construire une base orthogonale de vecteurs propres.

Cor. 20: $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ t.q. $A' = {}^t P A P$ est diagonale.

Rmq. 21: Les matrices symétriques complexes non réelles ne sont pas diagonalisables.

Thm. 22: Soit A une matrice hermitienne. $\exists P \in U_n(\mathbb{C})$ t.q. $A' = {}^t P A P$ est diagonale réelle.

Thm. 23: Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) si toutes ses vp. sont positive (resp. strict positive).

Cor. 24: $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ t.q. $A = {}^t B B$

Thm. 25: $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ si tous les mineurs principaux sont strictement positifs.

Cor. 26: $S_n^+(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

Thm. 27: Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\exists B \in S_n^+(\mathbb{R})$ t.q. $A = B^2$

Thm. 28: Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{R})$). Les A_i sont co-diagonalisable dans une base orthogonale si les A_i commutent.

Thm. 29: (Décomposition polaire) $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$

$$(O, S) \mapsto OS$$

et $U_n(\mathbb{C}) \times H_n^+(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ sont des homéomorphismes

(U, H) $\mapsto UH$

Lemme 28: $\forall S \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\|S\|_2 = \sqrt{\rho(S)}$

Thm. 29: $\exp: S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^+(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Thm. 30: $\exp: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n^+(\mathbb{C})$ est un homéomorphisme

b) Signature d'une forme quadratique / hermitienne
y une forme quadratique sur E de forme polaire φ .

Def. 31: x, y dans E sont orthogonales si $\varphi(x, y) = 0$

Def. 32: On note $E_\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\}$ appelée forme isotrope.

Def. 33: $\text{Ker}(\varphi) = E^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x, y) = 0\}$

Def. 34: φ est dite non dég. si $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$

Rmq. 35: Ces def restent valables pour φ une forme hermitienne.

Thm. 36: (Réduction de Gauss) Il existe $r \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}^*$

et $p_1, \dots, p_r \in E^*$ indépendantes t.q. $\forall x \in E \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i^2(x)$

En complétant $\{p_1, \dots, p_r\}$ en une base de E^* et en posant $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0$
on a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i^2(x)$

Thm. 37: Il existe une base $\{p_1, \dots, p_n\}$ de E t.q.

$$\text{Mat}_{(p_i)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La base $\{p_1, \dots, p_n\}$ est dite orthogonale relativement à φ .

Rmq. 38: La réduction de Gauss fonctionne pour les formes hermitiennes. La méthode consiste à remplacer les carrés par les carrés des modules.

Thm. 39: $\exists (s, t) \in \mathbb{N}^2$ t.q. pour toutes bases (e_i) de E orthogonale relativement à φ , $s = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \varphi(e_i) > 0\}|$ et $t = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid \varphi(e_i) < 0\}|$
t.q. $\text{rg}(\varphi) = s + t$. (s, t) est appelée signature de φ .

Thm. 40: Notons P (resp. N) l'ensemble des sev de E sur lesquels la restriction de φ est définie positive (resp. négative). Alors,
 $s = \max_{E \in P} \dim(E)$ et $t = \max_{E \in N} \dim(E)$

Cor. 41: (Sylvester) Si φ de signature (s, t) alors il existe B une base φ -orthogonale t.q.

$$\text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} I_s & & (0) \\ & -I_t & \\ (0) & & 0_{n-(s+t)} \end{pmatrix}$$

III. Application à la résolution de systèmes linéaires

Notation 42: On note $TI_n(\mathbb{R})$ (resp. $TS_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures)

Thm. 43: Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{k,k} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,k} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ soit inversible.}$$

Alors $\exists! (Z, U) \in TI_n(\mathbb{R}) \times TS_n(\mathbb{R})$ tq les coef. diag de Z soient des 1 et $A = ZU$

Rmq. 44: La factorisation LU permet de résoudre une équation $Au = b$ en résolvant 2 systèmes triangulaires $Zu = b$ et $Uu = w$.

Thm. 45: (Décomposition Cholesky) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists! B = (b_{ij}) \in TI_n(\mathbb{R})$ tq $\forall i, b_{ii} > 0$ et $A = B^t B$

(*)

Def.: Une forme quadratique q est dite positive (resp. strictement) si $\forall x \in E, q(x) \geq 0$ (resp. > 0)

Thm.: Soit q une forme quadratique et A sa matrice dans une base. q est (strict) positive si $A \in (S_n^+(\mathbb{R}) \setminus S_n^+(\mathbb{R})) \cup S_n^+(\mathbb{R})$

Rmq.: On a une définition et un thm analogue pour une forme hermitienne

[ROM]
p. 477

Références:

[GOU]: Gourdon, Algèbre & proba

[ROM]: Rombaldi, Algèbre et géométrie

[GRI]: Grifone, Algèbre linéaire

[DUM]: Dumas, mathématiques ...

[CAL]: Caldero, nouvelles ... T1 1^{ère} ed.