

## 57 Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

### I. Généralités sur la convexité

#### 1. Ensembles convexes [HAS]

Ensemble convexe, ensemble étoilé, exemple, CL convexe, intersection de convexe

#### 2. Fonctions convexes [ROM]

Fonction convexe, épigraphe, cordes, exemples, continuité, inégalité des trois pentes, fonction affine, lien avec la dérivée, lien avec  $f''$

### II. Inégalités de convexité

#### 1. Inégalités classiques [ROM] [GOU]

Exemples pour des fonctions usuelles, inégalité de Young-Hölder-Minkowski, moyennes arithmétique-géométrique-harmonique

#### 2. En probabilités [KUR] [CHA]

Inégalité de Jensen, lemme de Borel-Cantelli 2, inégalité de Hoeffding

### III. Convexité et optimisation

#### 1. Fonctions différentiables [ROU]

DEV 1 : critères de convexité d'une fonction différentiable, regarder dans  $\mathbb{R}$ , lien avec la recherche de minimum

#### 2. Dans un espace de Hilbert [LI] [BMP]

DEV 2 : Théorème de projection sur un convexe fermé

L'application  $P_C$  est 1-lipschitzienne, théorème de projection sur un SEV fermé, théorème de représentation de Riesz, existence de l'adjoint, existence du gradient

### Annexe :

- Epigraphe, cordes, inégalité des trois pentes pour une fonction convexe [GOU]
- Schéma projection sur un convexe fermé [BMP]

### Présentation :

- Définir une fonction convexe sur un ensemble qui n'est pas convexe n'a pas de sens.
- C'est l'épigraphe qui fait le lien entre ensemble convexe et fonction convexe. En effet, une fonction est convexe si et seulement son épigraphe est convexe.
- L'étude des fonctions convexes se ramène à l'étude des fonctions convexes sur un intervalle réel. Cela justifie que l'on s'intéresse principalement à  $\mathbb{R}$ .
- On peut assez facilement déterminer si une fonction est convexe en regardant son graphe.
- Pour les fonctions convexes, le fait qu'un point soit un point critique suffit à ce qu'il soit en fait un minimum global (ce qui n'est pas vrai en général, penser à  $x \mapsto x^3$  dont la dérivée s'annule en 0).
- Dans le cas où  $K = \mathbb{R}$ , la caractérisation du projeté exprime que  $P_C(x)$  est l'unique point  $y$  de  $C$  tel que pour tout  $z \in C$ , l'angle formé par les vecteurs  $x - y$  et  $z - y$  est obtus (supérieur ou égal à  $\pi/2$ ).

- La conclusion du théorème de projection reste vraie si l'on suppose seulement que  $H$  est un espace préhilbertien et que le convexe  $C$  est complet pour la distance induite.

#### Développements :

- Critères de convexité d'une fonction différentiable  
- Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière, p127-329-381
- Théorème de projection sur un convexe fermé + corollaire sur  $\pi_C$   
- Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI, p32

#### Références :

- [HAS] Topologie générale et espaces normés, Hage Hassan
- [ROM] Elements d'analyse réelle, Rombaldi
- [GOU] Analyse, Gourdon
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [ROU] Petit Guide de Calcul Différentiel, Rouvière
- [LI] Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI

Leçon 253: Utilisation de la notion de convexité en analyse

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel avec  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

I Généralités sur la convexité

1) Ensembles convexes [4A5]

Def 1: Soit  $x, y \in E$ . On appelle segment de  $E$  d'extrémités  $x$  et  $y$  l'ensemble  $[x, y] = \{(1-t)x + ty; 0 \leq t \leq 1\}$

Def 2: Soit  $A \subseteq E$ . On dit que  $A$  est convexe si pour tout  $x, y \in A$ ,  $[x, y] \subset A$ .

Def 3: Soit  $A \subseteq E$ . On dit que  $A$  est étoilé si il existe  $a \in A$  tel que  $\forall x \in A, [a, x] \subset A$ .

Remarque 4:  $A$  convexe  $\Rightarrow A$  étoilé  $\Rightarrow A$  convexe par un  $a$ .

Exemple 5: • Tout SEV est convexe  
• Les convexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

Prop 6: Soit  $A$  convexe. Soit  $x_1, \dots, x_n \in A$  et  $t_1, \dots, t_n \geq 0$  tel que  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ . Alors  $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in A$ .

Prop 7: Une intersection de convexes est convexe.

2) Fonctions convexes [R0M]

Soit  $I$  un convexe d'un EVN  $(E, \|\cdot\|)$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Def 8: On dit que  $f$  est convexe si:  $\forall (x, y) \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ .

On dit que  $f$  est concave si  $-f$  est convexe.

Théorème 9:  $f$  est convexe si son épi-graphe  $\text{Epi}(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y \geq f(x)\}$  est convexe dans  $E \times \mathbb{R}$ .

Théorème 10: Une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est en dessous de ses cordes.

Théorème 11:  $f$  est convexe ssi pour toute couple  $(x, y) \in I$ , la fonction  $\varphi_{xy}: t \mapsto f((1-t)x + ty)$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

Exemples 12: • Toute norme sur  $E$  est convexe.

• La fonction exponentielle est convexe

• Une fonction affine est convexe et concave sur  $\mathbb{R}$ .

• Un intervalle  $I$  est un intervalle réel.

Théorème 13: Si  $f$  est convexe sur  $I$ ,  $f$  est continue sur  $I$ .

Théorème 14: On a équivalence entre:

1)  $f$  est convexe.

2)  $\forall x < y < z \in I$ , on a:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

3)  $\forall a \in I$ , la fonction  $\varphi_a: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est croissante sur  $I \setminus \{a\}$ .

Corollaire 15: Une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est affine ssi elle est convexe et concave.

Théorème 16: Si  $f$  est convexe sur  $I$ , elle admet une dérivée à droite et à gauche en tout point de  $I$ .

Corollaire 17: La fonction  $x \mapsto |x|$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

Ex 1, 18 mais n'est pas dérivable en 0.

Théorème 18: Soit  $f$  dérivable sur  $I$ . On a équivalence:

1)  $f$  est convexe sur  $I$

2) la fonction dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ .

3) La courbe représentative de  $f$  est située au dessus de sa tangente en tout point de  $I$ .

Théorème 19: Soit  $f$  deux fois dérivable sur  $I$ .

Alors  $f$  est convexe sur  $I$  ssi  $f'' \geq 0 \forall x \in I$ .

Exemple 20: La fonction  $\Gamma$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

est convexe.

II Inégalités de convexité

1) Inégalités classiques [R0M] [G0U]

Exemples 21: •  $e^x \geq 1 + x \forall x \in \mathbb{R}$

•  $\ln(x) \leq x - 1 \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

•  $\frac{1}{x} \leq \sin(x) \leq x \forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

Prop 22 (Inégalité de Young): Soit  $p, q > 0$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Alors:  $\forall m, n \in \mathbb{R}_+^*$  on a  $m^{1/p} n^{1/q} \leq \frac{1}{p} m + \frac{1}{q} n$

Cad:  $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$

Prop 23 (inégalité de Hölder) : Soit  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
 Alors :  $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$

Prop 24 (inégalité de Minkowski) : Soit  $p \geq 1$  et  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .  
 Alors :  $\left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}$

Remarque 25 : Cela fait de  $N(x) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

Def 26 : Soit  $x = (x_i)_{i=1}^n$  une suite de réels strictement positifs.  
 On note  $H(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$ ,  $G(x) = \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$  et  $A(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

Les moyennes harmoniques, géométriques et arithmétiques dex.

Prop 27 : On a :  $H(x) \leq G(x) \leq A(x)$ .

2) En probabilités [KUR] [CHA]

Théorème 28 (inégalité de Jensen) : Soit  $x$  une variable aléatoire intégrable à valeurs dans l'intervalle ouvert  $I$ . Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Alors :

$$f(\mathbb{E}[x]) \leq \mathbb{E}[f(x)]$$

Exemple 29 :  $\mathbb{E}[x^2] \leq \mathbb{E}[x]$

Lemme 30 (de Porel-Cantelli) : Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements indépendants tel que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$ .

Alors :  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ .

Théorème 31 (indépendance de Hoeffding) : Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de VA réelles indépendantes. Soit  $(a_n)_n$  et  $(b_n)_n$  deux suites de réels tel que  $a_n \leq x_n \leq b_n = 1 \quad \forall n \geq 1$ . Soit  $S_n = x_1 + \dots + x_n$ . Alors  $\forall x \geq 0$  et  $\forall n \geq 1$  :

$$P(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq x) \leq 2 \exp \left( -\frac{2x^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right)$$

### III Convexité et optimisation

1) Fonctions différentiables [ROU]

Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Prop 32 : Soit  $f$  différentiable sur  $U$ . Alors  $f$  est convexe ssi  $f(y) - f(x) \geq df(x)(y-x) \quad \forall x, y \in U$  [DEV]

Remarque 33 : Pour  $E = \mathbb{R}$ , cela revient à dire que le graphe de  $f$  est en-dessous de sa tangente.

Corollaire 34 : Pour  $E = \mathbb{R}$ , on retrouve que pour  $f$  dérivable,  $f$  est convexe ssi  $f'$  est croissante.

Prop 35 : Soit  $f$  deux fois différentiable sur  $U$ . Alors  $f$  est convexe sur  $U$  ssi  $d^2 f$  est une forme quadratique positive, c-à-d :  $d^2 f(x)(h, h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j \geq 0 \quad \forall x \in U, \forall h \in \mathbb{R}^n$ . [DEV]

Application 36 : Si  $f$  est différentiable en  $a \in U$  et  $df(a) = 0$  ( $a$  est un point critique) alors  $f$  admet en  $a$  un minimum global sur  $U$ .

Si  $f$  est deux fois différentiable avec  $df(a) = 0$  et  $d^2 f(a)(h, h) \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall h \in \mathbb{R}^n$  alors  $f$  admet en  $a$  un minimum global.

2) Dans un espace de Hilbert [Li] [DMP]

Soit  $H$  un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On note  $\| \cdot \|$  la norme associée au produit scalaire.

Prop 37 (identité du parallélogramme) : pour tout  $u, v \in H$  on a :

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

Théorème 38 (de projection): Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $C$  une partie convexe et fermée, non vide, de  $H$ . Alors pour tout  $x \in H$ , il existe un unique  $z \in C$  tel que :

$$\|x - z\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

On dit que  $z = p_C(x)$  est la projection de  $x$  sur  $C$ . Il est caractérisé par la propriété :

$$z \in C \text{ et } \operatorname{Re} \langle x - z, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C.$$

DEV 2

Prop 39: L'application  $p_C: H \rightarrow C$  est 1-lipschitzienne, donc continue.

Théorème 40: Si  $F$  est un SEV fermé de  $H$ , alors l'application  $p_F: H \rightarrow F$  est une application linéaire continue, et  $p_F(x)$  est l'unique point  $y \in F$  tel que:  $y \in F$  et  $x - y \perp F$ .

De plus:  $H = F \oplus F^\perp$ . On dit que  $p_F$  est la projection orthogonale sur  $F$ .

Corollaire 41: Pour tout SEV  $F$  de  $H$ , on a:  $F^{\perp\perp} = F$ .

Corollaire 42: Soit  $F$  un SEV de  $H$ . Alors  $F$  est dense dans  $H$ ssi  $F^\perp = \{0\}$ .

Théorème 43 (de représentation de Riesz): Pour toute forme linéaire continue  $\phi \in H'$ , il existe un unique  $z \in H$  tel que  $\phi(x) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in H$ .

Prop 44: Pour tout  $T \in \mathcal{L}_c(H)$ , il existe un unique opérateur  $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ , appelé adjoint de  $T$ , tel que:  $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$ .

De plus:  $\|T\|^* = \|T\|$ .

Application 45: Soit  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable en  $a \in H$ . Comme  $df(a) \in H'$ , il existe un unique vecteur de  $H$ , noté  $\nabla f(a)$  et appelé gradient de  $f$  en  $a$ , tel que:  $df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \forall h \in H$ .

## ANNEXE

- 1) Epigraphe d'une fonction convexe BPP 96
- 2) Courbe en dessous des cordes BPP 96
- 3) Inégalité des 3 pentes BPP 96
- 4) Projection sur un convexe fermé BPP 96